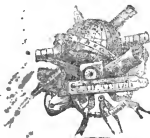
ARITMETICA
PRATICA E TEORETICA

DI

GIACOMO SCHETTINI

PROFESSORE NEL LICEO GINNASIALE PRINCIPE UMBERTO
E NELLA REGIA SCUOLA NAUTICA DI NAPOLI

Quinta Edizione

NAPOLI
TIPOGRAFIA DI STANISLAO DE LELLA
Strada S. Gio: Maggiore Pignatelli, 34.
1868

PARTE PRIMA

CAPITOLO I.

NOZIONI PRELIMINARI.

1. Tutto ciò che si riguarda come capace di aumento o di diminuzione, e di cui se ne può concepire il doppio, il triplo, ec. ovvero la metà, la terza parte, ec. prende il nome di *grandezza* o *quantità*.

La grandezza può manifestarsi sotto due diversi aspetti.

O si manifesta come un sol tutto senza distinzione o interruzione di parti, ed allora si chiama *grandezza continua*. Tal è, per esempio, una linea, una superficie, un solido.

O si manifesta come una collezione di parti o di cose simili distinte l'una dall'altra, ed allora si chiama *grandezza discreta* (*). Tal è, per esempio, una collezione di libri, di uccelli, di alberi.

2. Le grandezze, o che sieno continue o discrete si distinguono in *omogenee* (**) ed *eterogenee* (***).

Due grandezze diconsi *omogenee* o *della stessa natura* quando sono paragonabili fra loro, in maniera da potersi dire che una è maggiore, minore, o eguale all' altra. Quando ciò non avviene diconsi *etorogenee*.

Così, per esempio, le linee sono omogenee con le linee, le superficie con le superficie, i pesi con i pesi. Ma le linee sono eterogenee tanto con le superficie quanto con i pesi, ed i pesi con le superficie: difatto, non può istituirsi paragone di maggioranza o minoranza fra linea e superficie, fra linea e peso, e fra superficie e peso.

3. *Misurare* una grandezza vuol dire paragonarla ad un' altra della stessa natura per vedere quante volte contieue quest' altra, o quante parti contiene di quest' altra.

(*) Dal latino *discretus* derivante da *discerno* che significa *distinguere* o *discernere*.

(**) Dal greco ὁμος (omos) *simile*, e γενος (genos) *genere*.

(***) Dal greco ἑτερος (heteros) *diverso*, e γενος (genos) *genere*.

Quella grandezza che si prende per termine di paragone quando se ne misura un'altra, si chiama *unità*.

Quel risultato che si ha dal misurare una grandezza, il quale esprime quante unità o parti dell' unità essa contiene, si chiama *numero*.

Dunque il numero esprime la misura di una grandezza, cioè denota quanto essa è rispetto a quella che si è presa per unità (*)

4. Si dice *numero intero* quello che esprime una o più unità, senza parti di essa. Si dice poi *numero fratto* quello che esprime parti dell' unità.

Così quando diciamo tre metri, cinque barili; *tre* e *cinque* sono numeri interi, perchè il primo contiene tre unità, ciascuna delle quali è il metro, ed il secondo ne contiene cinque, ciascuna delle quali è il barile. Ma quando diciamo tre quarti di metro, ovvero barili otto e mezzo, *tre quarti* è un numero fratto, perchè esprime parti dell' unità; ed il numero *otto e mezzo* si compone di un intero ed un fratto, perchè esprime unità e parti di essa.

5. L' unità è *arbitraria* quando misura una grandezza continua, ed è *naturale* quando misura una grandezza che non è continua.

Così, per esempio, se deve misurarsi una linea che è una grandezza continua, si può prendere arbitrariamente per unità un' altra linea chiamata *piede*, o un' altra chiamata *metro*, o un' altra chiamata *palmo*, ec.; e la linea proposta sarà eguale nel primo caso ad un certo numero di piedi, nel secondo ad un certo numero di metri, e nel terzo ad un certo numero di palmi. Se poi deve misurarsi una grandezza che non è continua, come per esempio, una collezione di cavalli, di

(*) Nella quantità discreta si considera una collezione di unità, senza che sia necessario conoscere quante unità e parti dell' unità sono contenute nella quantità discreta; ma il numero è quello che dà questa conoscenza, cioè esprime la *misura* della quantità. Ecco perchè Newton definiva il *numero* non esser tanto la collezione di più unità, quanto la ragione astratta fra una quantità e quella dello stesso genere presa per unità.

sedie, di arance; il cavallo, la sedia, l'arancia è naturalmente l'unità.

6. I numeri si distinguono in *astratti* e *concreti*.

Si dice *numero astratto* quello che si enuncia senza denominare la specie delle sue unità. Così p. es. dicendosi *nove*, *quattro*, *dieci*, questi numeri sono astratti.

Si dice *numero concreto* quello in cui si denomina la specie delle sue unità. Tali sono i numeri *cinque miglia, sei uomini, otto giorni*, dove è denominata la specie delle loro unità, la quale nel primo numero è il miglio, nel secondo e l'uomo, e nel terzo è il giorno.

7. I numeri concreti possono essere *omogeni* ed *eterogenei*.

Diconsi *omogenei* quando esprimono cose della stessa natura, ed *eterogenei* quando esprimono cose di natura diversa.

Così due agnelli, cinque agnelli, sette agnelli sono tre numeri omogenei, perchè tutti esprimono agnelli che sono cose della medesima natura; ma due miglia, cinque colonne, sette soldati sono tre numeri eterogenei, perchè le miglia, le colonne, ed i soldati sono cose di natura diversa.

8. La *Matematica* (*) è quella scienza che ha per oggetto la grandezza. Essa è distribuita in più rami, che prendono distinto nome, secondo il modo diverso con che contemplano la grandezza.

Quel ramo delle scienze matematiche che tratta della grandezza continua si chiama *Geometria* (**).

Si chiama poi *Algebra* (***) quel ramo delle matematiche che si occupa della quantità discreta in modo generale.

Quella parte delle matematiche la quale si occupa partico-

(*) Dal greco ματηματικη (matematice) che significa *scienza*, chiamandosi così per antonomasia questa parte dell'umano sapere.

(**) Da γεα (gea) *terra* e μετρον (metron) *misura*; perchè ebbe origine dal misurare la terra. La Geometria si occupa particolarmente delle grandezze continue dette *geometriche*, le quali sono le linee, le superficie, ed i solidi; ma vi sono altre grandezze continue, come le *forze* ed il *tempo*, di cui se ne occupa una parte delle matematiche detta *meccanica*.

(***) Si fa derivare dalle due parole arabe *el* (il), e *geber* (ristaurazione), cioè la ristaurazione dell'aritmetica comune.

larmente dei numeri si chiama *Aritmetica* (*). Essa dunque è la scienza dei numeri.

9. La matematica poggia i suoi ragionamenti su talune verità o principii evidenti per sè stessi, i quali diconsi *assiomi* (**), e sono i seguenti.

I. Il tutto è maggiore di ciascuna sua parte, ed è uguale all'insieme di tutte le parti nelle quali è stato diviso.

II. Le quantità uguali ad una terza sono uguali fra loro.

III. Due quantità che sono doppie triple, quadruple, ec. di quantità uguali sono eguali fra loro.

IV. Le quantità che sono la metà, la terza parte, la quarta parte, ec. di quantità uguali, sono uguali fra loro.

V. Se a quantità eguali si aggiungono quantità uguali, quelle che ne risultano saranno uguali fra loro.

VI. Se da quantità uguali si tolgono quantità uguali, quelle che rimangono sono uguali fra loro.

10. Si chiama *teorema* (***) una verità che non è chiara per sè stessa come l'assioma, ma diviene evidente in forza di un ragionamento che dicesi *dimostrazione*.

Si chiama problema (****) una questione che si propone a risolvere.

Dicesi *corollario* (*****) una conseguenza che si ricava, o dopo la dimostrazione di un teorema, o dopo la *soluzione* di un problema.

Si chiama *lemma* (******) una proposizione che si assume per servire di sussidio alla dimostrazione di un teorema o alla soluzione di un problema.

Si dice *scolia* (*******) un osservazione che si pospone alla dimostrazione di un teorema o alla soluzione di un problema.

(*) Dal greco αριθμος (aritmos) *numero* τεχνε (tecne) *arte*; cioè *arte de' numeri*.

(**) Dal greco αξιωμα (axioma) *dignità*, derivante da αξιος (axios) degno; cioè proposizione *degna* per eccellenza.

(***) Dal greco θεωρημα (teorema) *contemplazione*, derivante da (teoreo) *io contemplo*.

(****) Dal greco προβλημα (problema), proveniente dalle due parole (pro) *innanzi*, e (blemi) *io getto*.

(*****) Dal latino *corrollarium* che significa conseguenza.

(******) Dal greco λημμα (lemma) *assunto*, ossia ciò che si prende o assume.

(*******) Dal greco σχολιον (scolion) *chiosa*, o *osservazione*.

NUMERAZIONE

11. Per distinguere un numero da un altro, richiedendosi che abbiano nomi differenti, è necessario assegnare un nome a ciascuna collezione di unità; conviene dunque formare queste diverse collezioni, e dare a ciascuna il proprio nome.

Dicesi *numerazione* l'arte di formare nominare e scrivere tutti i numeri possibili; e però si distingue la numerazione parlata dalla scritta.

12. La maniera più naturale di formare i numeri si è di aggiungere una unità ad un'altra unità, e si avrà così un primo numero; poi a questo numero si aggiungerà un'altra unità, e si avrà un secondo numero; ed a questo aggiungendo un'altra unità, se ne avrà un terzo; e similmente può proseguirsi fin dove si vuole. Dunque:

I numeri sono *infiniti*, perchè niente impedisce di aggiungere altre unità ad un numero quanto si voglia grande, già formato.

NUMERAZIONE PARLATA

13. La *numerazione parlata* è l'arte di nominare tutti i numeri possibili, servendosi di pochissimi vocaboli fra loro convenevolmente combinati. Questo è quel che passiamo ad esporre.

14. Aggiungendo un'unità ad un'altra unità, il numero che ne risulta si chiama *due*.

Aggiungendo a due un'unità, il numero che ne nasce si chiama *tre*.

Facendo lo stesso rispetto a tre, e così successivamente, si avranno i numeri *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*, *dieci*.

La collezione di nove unità più una, che abbiamo chiamata *dieci*, si chiama anche *decina*.

15. Aggiungendo successivamente al numero dieci un'unità, due unità, tre unità e così di seguito sino a nove unità, si avranno i numeri *undici*, *dodici*, *tredici*, *quattordici*, *quindici*, *sedici*, *diciassette*, *diciotto*, *diciannove*.

16. Aggiungendo dieci unità al numero dieci, si avrà una collezione di due decine che si chiama *venti*.

Una collezione di tre decine si chiama *trenta*; quella di quattro *quaranta*; quella di cinque *cinquanta*; quella di sei *ses-*

santa ; quella di sette *settanta* ; quella di otto *ottanta*; e quella di nove *novanta*.

Si conta per decine come si conta per unità, dicendosi *una decine* , *due decine* ovvero *venti*, *tre decine* ovvero *trenta*, *quattro decine* ovvero *quaranta*, e così di seguito sino a *nove decine* ovvero *novanta*.

I numeri composti di decine ed unità , eccetto pochissimi, si pronunziano aggiungendo al numero delle decine quello delle unità che vi sono dippiù (*).

Così p. es. il numero composto di due decine più cinque unità , si pronunzia *venticinque* ; il numero composto di sei decine ed otto unità, si pronunzia *sessantotto*; e similmente degli altri.

17. Una collezione di dieci decine si chiama *cento*, ovvero *centinaio*.

Si conta per centinaia come si conta per decine e per unità, dicendosi: *un centinaio* , ovvero *cento* , *due centinaia* ovvero *duecento* , *tre centinaia* ovvero *trecento* , e così di seguito sino a *nove centinaia* ovvero *novecento* (**).

I numeri composti di centinaia , decine , ed unità, si pronunziano aggiungendo al numero delle centinaia quello delle decine e delle unità che vi sono di più. Così , per esempio , un numero che contiene tre centinaia, quattro decine, e due unità , si pronunzia dicendosi: *trecentoquarantadue*.

18. Una collezione di dieci centinaia si chiama *mille* ovvero *migliaio*.

Si conta per migliaia , come si conta per centinaia, decine, ed unità.

(*) Solamente vi sono delle eccezioni per i numeri compresi fra dieci e venti ; perchè le collezioni di una decina ed un' unità , di una decina e due unità , ec. sino a quella di una decina e sei unità , invece di chiamarsi *undici* , *dodici* , *tredici* , *quattordici* , *quindici* , *sedici* , avrebbero dovuto dirsi : *dieciuno*, *diecidue*, *diecitre*, *dieciquattro*, *diecicinque*, *diecisei*. Così pure , per uniformità di linguaggio , invece di *venti* , *trenta* , *quaranta*, *sessanta*, avrebbe dovuto dirsi : *duanta*, *treanta*, *quattranta* , *seianta*.

(**) Per vezzo di lingua si dice : *dugento* invece di duecento ; come pure suole dirsi *cenquaranta*, *cencinquanta* invece di centoquaranta e centocinquanta.

L'unione di dieci migliaia non ha nome particolare, perciò si chiama *decina di migliaia.*

L'unione di dieci decine di migliaia, la quale forma un centinaio di migliaia, nè anche a nome particolare, perciò si chiama *centinaio di migliaia.*

L'unione di dieci centinaia de' migliaia ossia di mille migliaia si chiama *milione.*

Dai milioni in poi si cambia nome di tre in tre ordini di unità: questi nomi sono i seguenti.

Le unità di migliaia di milioni diconsi *bilioni o milliardi*; le unità di migliaia di bilioni diconsi *trilioni*; le unità di migliaia di trilioni diconsi *quadrilioni*, e così di seguito. Dunque mille migliaia fanno un milione, mille milioni fanno un bilione, mille bilioni fanno un trilione, ec. (*)

19. Da quanto si è detto si raccoglie che un numero si decompone in diversi ordini di unità, che cominciando dalle unità semplici, cioè da quelle del *primo ordine*, e salendo a quelle degli ordini *superiori* sono, *unità semplici*, *unità di decine*, *ed unità di centinaia*; poi vengono le *unità di migliaia*, le *unità di decine di migliaia*, e le *unità di centinaia di miglia*; indi seguono *le unità di milioni*, *le unità di decine di milioni*, e le *unità di centinaia di milioni*; ed in appresso,

(*) Nella presente Edizione ci siamo uniformati alla nomenclatura che si usa in Francia, per essersi resa oramai comune anche in Italia; ma non dobbiamo dimenticare che nella nomenclatura usata dagl'italiani si cambia nome di sette in sette ordini di unità; così che i milioni di milioni diconsi *bilioni*, i milioni di bilioni diconsi *trilioni*, i milioni di trilioni diconsi *quadrilioni*, e così di seguito. E però, secondo questa nomenclatura, i diversi ordini di *unità* in cui si decompone un numero sono: *unità semplici*, *unità di decine*, ed *unità di centinaia*; *unità di migliaia*, di *decine di migliaia*, e di *centinaia di migliaia*; *unità di milioni*, di *decine di milioni*, e di *centinaia di milioni*; *unità di migliaia di milioni* di *decine di migliaia di milioni*, e di *centinaia di migliaia di milioni*; *unità di bilioni*, di *decine di bilioni*, e di *centinaia di bilioni*; *unità di migliaia di bilioni*, di *decine di migliaia di bilioni*, e di *centinaia di migliaia di bilioni*; e similmente si procede fin dove si vuole.

le *unità di bilioni*, le *unità di decine di bilioni*, e le *unità di centinaia di bilioni*; e similmente si prosegue rispetto ai trilioni ed alle unità degli ordini superiori.

20. Allorchè si enuncia un numero si enunciano prima le unità dell' ordine più alto, e poi quelle degli ordini che sono di dieci in dieci volte minori.

Così p es. dovendosi enunciare il numero che contiene tre unità, cinque decine, e sette centinaia, si comincia da quelle dell' ordine più elevato, e si dirà: *settecentocinquantatre*.

NUMERAZIONE SCRITTA

21. La *numerazione scritta* è l' arte di rappresentare tutti i numeri possibili per mezzo di pochi segni, che diconsi *cifre* ovvero *caratteri* o *figure*.

I nove primi numeri si rappresentano generalmente con le seguenti cifre.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
uno,	*due,*	*tre,*	*quattro,*	*cinque,*	*sei,*	*sette,*	*otto*	*nove,*

ciascuna delle quali denota il numero che sta scritto al di sotto di essa.

22. Siccome ogni numero intero si compone di diversi ordini di unità, ciascuno dei quali non ne contiene più di nove, altrimenti se ne contenesse dieci o più, queste formerebbero un' unità dell' ordine superiore; ne segue che ogni numero intero può rappresentarsi con le cifre assegnate a' nove primi numeri, adoprandone una per ciascun ordine, la quale serve ad indicare quante unità di quell' ordine contiene il numero; ma bisogna scriverle in maniera da potersi ben distinguere l' ordine di unità che ciascuna cifra rappresenta.

Se poi in un numero mancassero le unità di un certo ordine, per dinotare tal mancanza, ossia per conservare alle unità degli ordini superiori quel posto che debbono occupare, si è immaginata una cifra a parte col fine di supplirla nel luogo dove mancano le unità di quell' ordine. Questa cifra si chiama *zero*, e si rappresenta con la caratteristica *0*. E però:

Lo *zero* è quella cifra aritmetica, che si adopera per supplire quell' ordine di unità le quali mancano in un numero; quindi lo zero non ha valore per sè medesimo, ma serve a

far conservare il valore conveniente alla cifra che lo precede a sinistra.

Dunque, secondo la maniera convenuta di formare i numeri, le cifre che bastano a rappresentare qualunque numero sono dieci, cioè le nove cifre che rappresentano i nove primi numeri, e la cifra *zero* che non ha alcun significato o valore; e perciò le altre nove si chiamano *cifre significative* (*).

Regola per scrivere un numero

23. Un numero si scrive in modo corrispondente a quello con cui si pronunzia; e perciò prima si scrive la cifra che denota le unità dell'ordine più alto, e poi, procedendo da sinistra verso dritta, si scriveranno quelle che denotano le unità degli ordini di dieci in dieci volte minori, avvertendo di porre un zero dove mancano le unità di qualche ordine.

Così, per esempio, dovendosi scrivere 5 centinaia, 2 decine, e 7 unità, si scriverà 527, e si leggerà cominciando da sinistra verso dritta, dicendo: *cinquecentoventisette*.

Parimente, dovendosi p. es. scrivere il numero *ottomila centosessantanove*, si scriverà 8169.

Se poi voglia scriversi un numero formato p. es. da 6 migliaia, 2 centinaia, e 3 unità; siccome in questo numero mancano le decine, le quali devono occupare il secondo posto, un tal posto si farà occupare dalla cifra *zero*, e si avrà il numero 6203, che si leggerà *seimila dugentotre*.

Ancora: volendo scrivere p. es. 7 decine di migliaia, che sono unità del quinto ordine, siccome mancano le unità degli altri quattro ordini inferiori, debbono porsi quattro zeri a dritta della cifra 7, e si avrà il numero scritto 70000, che si leggerà *settantamila*. Per la stessa ragione i numeri *dieci, cento, mille*, ec. ossia una decina, un centinaio, un migliaio, ec. si scriveranno aggiungendo rispettivamente uno, due, tre zeri ec. a dritta dell'unità, e si avranno i numeri scritti 10, 100, 1000, ec. (**).

(*) Giova esercitare i giovanetti a farli distinguere i diversi ordini di unità rappresentati dalle cifre di un numero già scritto, facendo rilevare il posto che viene occupato da ciascun ordine di unità rispetto alla prima cifra a dritta.

(**) Alla fine di questi Elementi faremo vedere il modo tenuto dagli antichi romani nello scrivere i numeri.

Dunque in un numero scritto la prima cifra a dritta rappresenta unità semplici, la seconda rappresenta unità di decine, la terza unità di centinaia, la quarta unità di migliaia, e similmente seguitando, le altre cifre dinotano unità di dieci in dieci volte più grandi, seguendo la stessa legge della numerazione parlata.

24. Dal modo convenuto di scrivere i numeri, ne segue la

Regola per leggere un numero

Se il numero non ha più di tre cifre, la prima cifra a dritta dinotando unità, la seconda decine, e la terza centinaia, si leggerà cominciando da sinistra, cioè pronunziando prima il numero delle centinaia, poi quello delle decine, ed indi quello delle unità. Così p. es. il numero 538 si legge *cinquecentotrentotto*.

Se poi avesse più di tre cifre, allora, per maggior facilità si dividerà con virgole in gruppi, ciascuno di tre cifre, cominciando da dritta: quindi le cifre del primo gruppo dinoteranno *unità semplici*, *unità di decine, ed unità di centinaia*, quelle del secondo *unità di migliaia*, *di decine di migliaia*, *e di centinaia di migliaia*, quelle del terzo *unità di milioni*, *di decine di milioni, e di centinaia di milioni*, quelle del quarto *unità di bilioni*, di *decine di bilioni*, e di *centinaia di bilioni*, e così di seguito; perciò si pone *1* sulla cifra che vien dopo il secondo gruppo per indicare che dinota unità di milioni, e si pone *2* sulla cifra che vien dopo il terzo gruppo per indicare che denota unità di bilioni, e si pone *3* sulla cifra che vien dopo il quarto gruppo per indicare che dinota unità di trilioni, e così di seguito.

Poi si leggerà il numero cominciando da sinistra, leggendo ciascun gruppo come se fosse solo; ma deve proferirsi l'ordine di unità che gli compete, vale a dire si aggiungerà la parola *mila* dove si trova la sola virgola, e la parola *milioni*, *bilioni*, *trilioni*, ec. dove si trova la cifra segnata al di sopra rispettivamente con *1*, *2*, *3*, ec.

Così, per esempio, il numero 58302617150219, diviso in gruppi, e segnato nel modo anzidetto, diverrà

$$58^3,302^2,617^1,150,219,$$

e si leggerà *cinquantottotrilioni trecenduebilioni seicentodiciassettemilioni centocinquantamila duecentodiciannove* (*).

SISTEMA DI NUMERAZIONE

25. Il *sistema di numerazione* consiste nella convenzione fatta di formare i numeri in modo che essi si compongano di diversi ordini di unità, ciascuna delle quali sia un determinato numero di volte maggiore di un' unità dell' ordine immediatamente inferiore.

Quel numero che denota quante volte un' unità di ciascun ordine è maggiore dell' unità dell' ordine immediatamente inferiore, si chiama *base* del sistema di numerazione.

26, La base del nostro sistema di numerazione è il numero *dieci*, perchè in questo sistema ogni unità di ciascun ordine è dieci volte maggiore dell' unità dell' ordine immediatamente inferiore (**).

Se poi consideriamo le cifre di un numero nel nostro sistema di numerazione, una cifra rappresenta unità 10 volte, 100 volte, 1000 volte, ec. più grandi di quelle rappresentate della prima cifra a dritta, secondo che occupa il secondo, il terzo, il quarto posto, ec. rispetto a questa cifra; e però il valore delle sue unità dipende dal posto che la cifra occupa.

Così, per esempio, la cifra 4 dinoterebbe unità semplici; ma ponendo un zero alla sua dritta dinoterà 4 decine, che sono dieci volte più grandi delle unità semplici; e mettendo due zeri alla sua dritta dinoterà 4 unità di centinaia, che sono dieci volte più grandi delle decine e cento volte più grandi delle unità semplici; e mettendovi tre zeri dinoterà migliaia, che sono dieci volte più grandi delle centinaia, e mille volte più grandi delle unità semplici. Similmente si procede innanzi.

(*) Nel modo usato dagl' italiani le caratteristiche si apporrebbero così

$$58^{a},302,617^{1},150,219.$$

e si leggerebbe *cinquantottobilioni, trecentoduemila seicentodiciassettemilioni cencinquantamila dugentodiciannove.*

(**) Nella fine di questo Libro parleremo dei diversi sistemi di numerazione.

Inoltre, osserviamo che il numero formato da più cifre consecutive qualsivogliono di un numero dato, avendo riguardo al posto che occupano, rappresenta unità dell'ordine della prima di esse cifre che sta a dritta. Così p. es. nel numero 58746 considerando le cifre 5, 8, 7, siccome 7 dinota centinaia, e le cifre 8 e 5 dinotano unità di 10 in 10 volte più grandi, il numero rappresentato dalle dette tre cifre, avendo riguardo al posto da esse occupato, dinoterà 587 centinaia. Similmente si vede che se consideriamo le quattro cifre 5, 8, 7, 4, esse rappresentano 5874 decine; e così via discorrendo.

CAP. II.

QUATTRO OPERAZIONI PRINCIPALI SU I NUMERI INTERI.

27. Si chiama operazione di *calcolo* (*) qualunque operazione di composizione o decomposizione che si fa su di uno o più numeri per trovare altri numeri.

28. Diversi problemi possono presentarsi a risolvere relativamente a' numeri; ma i quattro seguenti costituiscono propriamente la base del calcolo numerico, e perciò si chiamano le *quattro operazioni principali* o *fondamentali* dell'aritmetica. Ecco ne gli enunciati, con lo stesso ordine con cui dobbiamo risolverli,

1. *Trovare un numero uguale all' insieme di più numeri dati.*
2. *Trovare l'eccesso di un numero su di un altro minore.*
3. *Ripetere un numero tante volte quante unità sono in un altro.*
4. *Dividere un numero in un dato numero di parti uguali.*

Le operazioni di calcolo che si fanno per risolvere i quattro problemi accennati, prendono rispettivamente il nome di *addizione*, *sottrazione*, *moltiplicazione*, *e divisione*, ed esse formeranno l'oggetto di questo capitolo.

(*) Dal Latino *calculus* che significa sassolino, petruzza; e si estese questa parola a dinotare le operazioni che si fanno su i numeri, perchè gli antichi si servirono di picciole pietre nel fare i loro conti ed in comporre i numeri.

ADDIZIONE DE' NUMERI INTERI.

29. L' *addizione* è quella operazione aritmetica, che ha per fine di riunire più numeri in un solo, il quale chiamasi *somma*.

30. Per indicare che più numeri debbono addizionarsi fra loro, si è convenuto far uso del segno $+$, che si pronunzia *più*, e si scrive fra l'uno e l'altro de'numeri da addizionarsi. Così, per esempio, volendo indicare che 5 deve addizionarsi con 4, si scrive $5+4$, e si legge *5 più 4*. Come pure per indicare che debbono addizionarsi i numeri 7, 3, e 6, si scriverà $7+3+6$.

Volendo indicare che due numeri o due qualsiansi quantità sono eguali, si fa uso del segno $=$, che si pronuncia *eguale a*, e si scrive fra le due quantità che sono uguali, le quali si dice che costituiscono un'*eguaglianza*. Così, per esempio, per indicare che $5+4$ è uguale a 9, ovvero che $10+2$ è uguale a $7+5$, si scrive $5+4=9$, e $10+2=7+5$. La quantità che sta a sinistra del segno eguale si dice *primo membro* dell'eguaglianza, e la quantità che sta a dritta si dice *secondo membro*.

31. ***L'addizione dei numeri interi si fa scrivendoli l'uno sotto l'altro, in modo che le unità dello stesso ordine siano situate in una medesima colonna, e si tira una linea sotto l'ultimo numero per separarlo dalla somma; poi si addizionano i numeri contenuti in ciascuna colonna, cominciando dalla dritta; se la somma non supera 9, si scrive sotto la linea tal quale si è ottenuta, ma se contiene decine, si scrivono le sole unità, e le decine si riuniscono alla colonna seguente, la somma poi dell'ultima colonna, si scrive tal quale si ottiene.***

Sieno p. e. da addizionarsi i numeri 6549, 5082, e 394.

Scriviamo i numeri dati in modo che le cifre dello stess' ordine cadono in una medesima colonna, come si vede quì a fianco.

$$\begin{array}{r} 6549 \\ 5082 \\ \underline{394} \\ 12025 \end{array}$$

Poi cominciamo dall' addizionare le loro unità, e si dirà: 9 unità più 2 unità fanno 11, più 4 unità fanno 15 unità, ma poichè 15 unità formano una decina e 5 unità, scriviamo sotto la linea le sole 5 unità, e la decina si ritiene per unirla alla colonna delle decine.

Indi passiamo ad addizionare le decine che sono nella seconda colonna, alle quali si aggiunge la decina ritenuta, e si di-

rà: una decina si porta, più 4 decine fanno 5 decine, più 8 fanno 13, più 9 fanno 22 decine, ma poichè 22 decine formano 2 centinaia e due decine, scriviamo le sole 2 decine nel posto delle decine, e le 2 centinaia si ritengono per unirle alla colonna delle centinaia.

Passiamo ora ad addizionare le centinaia che sono nella terza colonna, alle quali si aggiungono le due centinaia ritenute, e si dirà: 2 centinaia che si portano, più 5 centinaia fanno 7, più 3 fanno 10 centinaia, ma poichè 10 centinaia formano un migliaio e zero centinaia, scriviamo zero nel posto delle centinaia, ed il migliaio si ritiene per unirlo alla colonna delle migliaia.

Finalmente si passa ad addizionare le migliaia che sono nella quarta colonna, alle quali si aggiunge il migliaio ritenuto, e si dirà: 1 migliaio che si porta, più 6 migliaia fanno 7, più 5 fanno 12 migliaia, cioè 2 migliaia ed una decina di migliaia, perchè non vi è nient' altro ad addizionare.

Ora, avendo unito insieme tutte le unità, tutte le decine, tutte le centinaia, e tutte le migliaia de'numeri dati, ed avendo trovato che formano 5 unità, 2 decine, zero centinaia, 2 migliaia, ed una decina di migliaia, ne segue che il numero 12025 il quale contiene tutte queste unità, decine, centinaia, migliaia, e decine di migliaia, sarà la loro somma (*).

32. Allorchè debbono addizionarsi molti numeri riesce più comodo, e difficilmente si va soggetto ad errori, scindendo l' addizione in più addizioni parziali, e poi facendo l'addizione delle diverse somme parziali che si ottengono.

Così, per esempio, se dovessero addizionarsi i numeri 3854, 7321, 7480, 9216, 532, 424, e 79, possiamo fare l'addizione in tre volte, come si scorge qui a fianco, cioè addizionando i primi tre numeri separatamente dagli ultimi quattro, si avranno così le due somme 18655, e 10251. Poi si addizioneranno queste due somme, e si otterrà la somma totale 28906.

```
 3854
 7321
 7480
-----
 9216
  532
  424
   79
-----
18655
10251
-----
28906
```

(*) Quì e nella sottrazione ed in taluni luoghi della moltiplicazione e divisione dei numeri interi, abbiamo esposte le operazioni ragionando, senza farle precedere dalle tre iniziali della parola *dimostrazione*, perchè le ragioni sono facili a capirsi, ed il saperle torna utile anche a coloro che debbonsi nella sola aritmetica pratica versare.

PROVA DELL' ADDIZIONE.

33. Si chiama *prova* o *riprova* di un'operazione aritmetica una seconda operazione, la quale si fa per verificare se la prima sia stata ben fatta.

La *prova* dell' addizione può farsi addizionando di nuovo i numeri dati da sotto in sopra; perchè le addizioni parziali facendosi in ordine inverso, difficilmente si può incorrere nel medesimo errore; perciò se si trova la stessa somma di prima, è segno che l'operazione è stata ben fatta.

La *prova* potrebbe anche farsi separando il primo dei numeri dati dagli altri con una linea, ed addizionando i rimanenti numeri; poi si toglierà la seconda somma dalla prima, e se si ottiene per resto il primo numero che si è separato, è segno che l' operazione è stata ben fatta; perchè, se p. e. i numeri dati sono cinque, dalla somma di tutti i cinque numeri togliendo la somma di quattro di essi, deve rimanervi il quinto numero.

Ma per fare la prova in tal modo, bisogna che si sappia eseguire la sottrazione, cosa che impareremo qui appresso.

ESERCIZII.

I. Si sono fatti cinque distinti pagamenti ad un appaltatore in conto di lavori eseguiti: il primo è stato di lire 385, il secondo di lire 4260, il terzo di lire 846, il quarto di lire 1268, il quinto di lire 92; si domanda la somma totale data all' appaltatore.

II. Quanto durò la potenza romana dalla fondazione di Roma sino all' anno 700 dell' era volgare, epoca in cui Carlomagno fu incoronato Imperatore da Leone III, conoscendosi che la sua prima età fu sotto setto Re per 244 anni, e la seconda fu sotto i Consoli per 470 anni, la terza sotto cinquantasette Imperatori per 505 anni, dal primo Imperatore Augusto sino ad Augustolo, il quale fu deposto da Odoacre Re degli Eruli, la quarta fu sotto questo Re e sotto otto Re Ostrogoti per 106 anni, e la quinta sotto ventidue Re Longobardi per 228 anni?

III. Qual è la popolazione di tutta la terra, conoscendosi che a un di presso l' Europa contiene 245 milioni di abitanti, l' Asia 629 milioni, l' Africa 67 milioni, e tutta l' America 59 milioni?

IV. Qual è (secondo la recente statistica di Dickens) la popolazione della terra, conoscendosi che vi sono 325 milioni di cristani, 5 d' isdraeliti, 560 di religioni asiatiche, 160 di maomettani, e 200 de' pagani?

V. Qual è la popolazione di tutta l'Italia, conoscendosi presso a poco quella de' suoi diversi stati prima delle annessioni, cioè, nelle due Sicilie 9120000 abitanti, nello stato Pontificio 2850000, nella Repubblica di S. Marino 7100, nel Granducato di Toscana 1790000, nel Ducato di Modena 578000, nel Ducato di Parma 464000, negli stati Sardi 4980000, nel Principato di Monaco 7200, nel regno Lombardo Veneto 4850000, nella Corsica o Italia francese 185000, in Malta o Italia inglese 102000, e nel cantone del Ticino o Italia Svizzera 102000?

SOTTRAZIONE DE' NUMERI INTERI.

34. La *sottrazione* è quell'operazione aritmetica che ha per oggetto di togliere un numero da un altro.

Il numero che soffre la sottrazione suole chiamarsi *diminuendo*, e quello che deve togliersi *diminutore*.

Quel numero che si ottiene dopo aver tolto dal diminuendo il diminutore si chiama *resto*, *residuo*, *eccesso*; o *differenza*.

35. Per indicare che un numero deve togliersi da un altro, si fa uso del segno —, che si pronuncia *meno*, e si pone fra i due numeri, scrivendo il diminuendo a sinistra del segno meno ed il diminutore a dritta. Così per indicare che da 9 deve togliersi 5, si scrive 9—5, e si legge *9 meno 5:* or poichè da 9 tolto 5 resta 4, ciò può indicarsi adoperando il segno di uguaglianza, cioè scrivendo $9 - 5 = 4$. Così pure per esprimere che 8—3 è eguale a 17 — 12, si scriverà $8 - 3 = 17 - 12$

La sottrazione può considerarsi come un' operazione inversa dell'addizione di due numeri; ed è propriamente quella operazione in cui essendo data la somma di due numeri, ed uno di essi, si vuol trovare l'altro. È importante notare che questo è veramente il punto di veduta generale sotto cui dovrebbe riguardarsi la sottrazione.

36. *La sottrazione de' numeri interi si esegue scrivendo il numero minore sotto il maggiore, in modo che le cifre dello stesso ordine sieno situate in una sotto l'altra, e si tira una linea sotto al minore per separarlo dalla differenza; poi, cominciando dalla dritta, si tolgono le unità della cifra inferiore da quelle della superiore, e quando ciò non può eseguirsi si aumenta di dieci la cifra superiore; ma nel continuare l'operazione, la cifra significativa seguente a quella aumentata di dieci deve consi-*

derarsi diminuita di un' unità, e se vi sono zeri intermedii, debbono considerarsi come 9.

Sia p. es. il numero 50369 da cui deve togliersi l'altro 23587. Scriviamo il numero minore sotto il maggiore, in modo che le cifre dello stesso ordine corrispondano in una sotto l' altra, come si vede quì di contro.

Poi cominciamo a togliere le 7 unità del numero minore dalle 9 unità del maggiore; e scriviamo sotto la linea le 2 unità che restano.

$$\begin{array}{r} 50369 \\ 23587 \\ \hline 26782 \end{array}$$

Passiamo poi a togliere le 8 decine del numero minore dalle 6 decine del maggiore, ma ciò non potendosi eseguire, le 6 decine si faranno imprestare un centinaio dalla cifra precedente 3 delle centinaia, la quale rimarrà 2; e poichè un centinaio ridotto in decine, ed aggiunto alle 6 decine fa 16 decine, dobbiamo perciò togliere le 8 decine del minore da 16 decine, e scriveremo il resto 8 nel posto delle decine.

Passiamo ora a togliere le 5 centinaia del numero minore dalle centinaia del maggiore le quali sono rimaste 2, ma non potendosi, ci faremo imprestare 1 migliaio dalla cifra delle migliaia, la quale essendo zero, bisognerà che essa pure si faccia imprestare una decina di migliaia dalla cifra 5, e però la cifra 5 resta 4, e la cifra zero diviene prima 10, perchè una decina di migliaia forma 10 migliaia, e poi resta 9 perchè impresta 1 migliaio alla cifra delle centinaia; ora 1 migliaio imprestato alle 2 centinaia formando 12 centinaia, bisognerà togliere da 12 centinaia le 5 centinaia del numero minore, ed il resto 7 centinaia si scriverà nel posto delle centinaia.

Passiamo ora a togliere le 3 migliaia del numero minore dalle migliaia del maggiore, le quali sono 9, perchè la cifra zero è divenuta 9; ed il resto 6 migliaia si scriverà nel posto delle migliaia.

Finalmente passiamo a togliere le 2 decine di migliaia del numero minore dalle decine di migliaia del maggiore, che sono rimaste 4; ed il resto 2 si scriverà nel posto delle decine di migliaia.

Or poichè abbiamo tolto dal numero maggiore tutte le unità, decine, centinaia migliaia, e decine di migliaia del minore, e vi sono rimaste 2 unità, 8 decine, 7 centinaia, 6 migliaia, e 2 decine di migliaia; ne segue che il numero

26782 composto da tutte queste unità, decine, centinaia, migliaia, e decine di migliaia, sarà il resto cercato.

PROVA DELLA SOTTRAZIONE.

37. *La* PROVA *della sottrazione si fa addizionando il numero minore col resto, poichè deve risultarne per somma il numero maggiore, se l' operazione è stata ben fatta.*

Così p. es. dovendosi togliere il numero 5783 dal numero 7829; eseguendo l' operazione come si vede quì di contro si avrà per resto 2046. Volendo ora assicurarci se l' operazione sia stata ben fatta, si addizionerà il numero minore 5783 col resto 2046; e poichè si ottiene per somma il numero maggiore 7829, siamo sicuri che l' operazione è stata ben eseguita.

$$\begin{array}{r} 7829 \\ 5783 \\ \hline 2046 \\ \hline 7829 \end{array}$$

In effetti, dal numero maggiore essendosi tolta una sua parte, che è il numero minore, ed il resto essendo l' altra parte, ne segue che queste due parti riunite debbono formare il numero maggiore.

OSSERVAZIONI SULLA SOTTRAZIONE DE' NUMERI INTERI.

38. *Se al diminuendo si aggiunge o toglie la stessa quantità, il nuovo resto sarà eguale al primo aumentato o diminuito rispettivamente della stessa quantità.*

In effetti, è chiaro che aggiungendo p. es. 5 al diminuendo, il resto conterrà 5 unità dippiù; e togliendone 5, il resto conterrà 5 unità di meno.

39. *Se al diminutore si aggiunge o toglie una quantità, il nuovo resto sarà eguale al primo diminuito o aumentato rispettivamente dalla medesima quantità.*

Difatto, se p. es. si aggiunge 5 al diminutore, il resto deve contenere 5 unità di meno, perchè si vengono a togliere dal diminuendo 5 unità dippiù di prima; e se si toglie 5 dal diminutore il resto dovrà contenere 5 unità dippiù, perchè si tolgono 5 unità di meno di prima.

40. *La differenza fra due numeri non cambia se ad essi si aggiunge o toglie la stessa quantità.*

Perchè aggiungendo una quantità al diminuendo, il resto è uguale al primo aumentato di questa quantità; ma aggiun-

gendola al diminutore il resto è uguale al primo diminuito della stessa quantità; perciò rimane del medesimo valore.

Parimente, togliendo una quantità dal diminuendo, il resto è uguale al primo diminuito di questa quantità, ma togliendola dal diminutore, il resto è uguale al primo aumentato della stessa quantità, perciò rimane del medesimo valore.

41. Nella sottrazione le cifre che hanno imprestato un'unità possono considerarsi dello stesso valore di prima, il che equivale ad aggiungere un'unità a ciascuna di esse; ma allora bisogna anche aggiungerla alla cifra inferiore che deve sottrarsi, perchè sappiamo che il resto non cambia quando ai due numeri si aggiunge la medesima quantità.

Così dovendo togliersi dal numero 8132 l'altro 5473; dopo scritti i numeri dati secondo la regola, come si vede qui a fianco, si dirà: da 12 tolto 3 resta 9; da 13 tolto 8 resta 5; da 11 tolto 5 resta 6; da 8 tolto 6 resta 2. Perciò il resto cercato sarà il numero 2659.

$$\begin{array}{r} 8132 \\ 5473 \\ \hline 2659 \end{array}$$

42. *Se da un numero deve togliersi la differenza fra due numeri, che è indicata dal segno meno, ciò può farsi togliendo dal detto numero il diminuendo ed aggiungendo al resto il diminutore.*

Sia p. es. il numero 15 da cui deve togliersi la differenza $7-3$ fra i numeri 7 e 3, che è indicata dal segno meno; ciò può farsi togliendo da 15 il diminuendo 7 della differenza, ed aggiungendovi poi il diminutore 3; perciò si avrà $15-(7-3)=15-7+3=11$.

Difatti, se da 15 si toglie 7, il resto è $15-7$, ma se il diminutore 7 di questa sottrazione si diminuisce di 3, sappiamo che il resto è uguale al primo aumentato di 3, perciò il resto sarà $15-7+3$.

COMPLEMENTO ARITMETICO.

43. Si chiama *complemento aritmetico* di un numero la differenza fra questo numero e quello le cui cifre sono l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre del numero. Così p. es. il complemento aritmetico di 5387 è uguale a $10000-5387=4613$.

È chiaro che per trovare il complemento aritmetico di un numero bisogna togliere tutte le sue cifre da 9, cominciando da sinistra, e l'ultima da 10; ma se l'ultima cifra è zero, si toglierà da 10 l'ultima cifra significativa, e si pongono a dritta del resto i zeri che sono a dritta di questa cifra.

Questa sottrazione suole farsi a memoria senza scrivere il

numero su cui si prende il complemento, cioè senza scrivere il numero formato dall'unità seguita da zeri sopra al proposto; anzi suole praticarsi di enunciare il resto leggendo le cifre a due a due, ovvero a tre a tre. Così p. es. i complementi aritmetici di 583094 e di 7183300, se vogliono prendersi leggendo le cifre a due a due, si dirà: *quarantuno sessantanove zero sei*, e *ventotto quattordici settecento.*

Si fa uso del complemento aritmetico per eseguire la sottrazione mediante l'addizione. Così p. es. se dal numero 208537 dovesse togliersi il numero 3456, invece di eseguire la sottrazione si aggiungerà al numero 208537 il complemento aritmetico di 3456, che è 6544, e si avrà per risultato il numero 215081 come si vede qui affianco; ma questo risultato supera il resto cercato di un'unità dell'ordine su cui si è preso il complemento, che in questo esempio è una decina di migliaia; in effetti, il complemento essendo eguale a 10000—3456, il risultato è eguale a 208537+10000—3456 invece di essere eguale a 208537—3456; perciò contiene una decina di migliaia dippiù del giusto, bisogna dunque togliere questa decina di migliaia, e si avrà il resto vero che sarà 205081.

$$\begin{array}{r} 208537 \\ 6544 \\ \hline 215081 \end{array}$$

Dunque per fare la sottrazione mediante il complemento aritmetico, bisogna aggiungere al numero maggiore il complemento aritmetico del minore, e togliere dal risultato un'unità dell'ordine su cui si è preso il complemento, che è l'ordine superiore al più alto del numero minore.

Ecco un altro esempio: sia da togliersi il numero 5190850 da 5792463. Aggiungiamo al numero maggiore il complemento del minore, come si vede qui di contro, e si avrà per risultato il numero 10601613; e togliendo da questo un' unità dell' ottavo ordine, che è quello su cui si è preso il complemento, si avrà il resto cercato, che sarà 601613.

$$\begin{array}{r} 5792463 \\ 4809150 \\ \hline 10601613 \end{array}$$

ESERCIZII.

I. Un negoziante che aveva comprato 2380 ettolitri di grano, ne ha venduto, in sei volte, prima 860 ettolitri, poi 275, poi 120, indi 84, poi 346, infine 58. Si domanda quanti ettolitri di grano gli rimangono a vendere.

II. La cima del Davalagiri monte dell' Asia il più alto del globo

si eleva di 8559 metri sul livello del mare. Si domanda di quanto essa supera quella del monte Bianco il più alto dell'Europa, che si eleva a 4810 metri, e di quanto quella del monte Zambi il più alto dell' Africa che si eleva a 4790 metri, e di quanto quella del monte Nevado di Sorata il più alto dell' America che si eleva a 7696 metri, e di quanto quella Gunong-Sago il più alto dell' Oceania che si eleva a 4575 metri.

III. La massima altezza a cui sin ora sia giunto l' uomo, è quella a cui si elevò Brioschi nel pallone in Padova, che fu di 8265 metri. Si domanda di quanto essa supera l' altezza a cui s' innalzò nel pallone Gay-Lussac in Parigi, che fu di 7016 metri, e l'altezza a cui salirono Bouzzingault e Hall sul monte Cimborazo in America, che fu 6013 metri, e l' altezza a cui si eleva il Condoro uccello che vola più alto, la quale è di 6496 metri.

IV. La massima profondità dell' oceano scandagliata fin ora (lat. aus. 36°49' long. oc. 37° 6', Greenwic) è di metri 14042. Si domanda di quanto supera il più profondo pozzo Artesiano presso Minden in Prussia, che è di 608 metri, e di quanto la più profonda miniera, che è quella di argento presso Guanaxuato nel Messico la quale è di 522 metri, e il pozzo di Monte Masi in Toscana, che è 373 metri.

V. La fune elettrica sottomarina, che metteva in comunicazione l' Europa con l' America da Valenzia a Terranova, era di miglia 2022; e la distanza fra queste due stazioni sulla superficie del mare è miglia 1600. Di quanto la gomona eletrica superava la distanza sulla superficie del mare?

MOLTIPLICAZIONE DE' NUMERI INTERI.

44. La *moltiplicazione* di due numeri interi è quell' operazione aritmetica, nella quale essendo dati due numeri, se ne cerca un terzo che risulti dal ripetere uno di essi tante volte quante unità sono nell' altro.

Il numero che si ripete si chiama *moltiplicando*. Il numero che dinota quante volte il moltiplicando deve ripetersi si chiama *moltiplicatore*. Il terzo numero che si cerca si chiama *prodotto*. Il moltiplicando ed il moltiplicatore hanno il nome comune di *fattori*, perchè concorrono insieme a *fare* il prodotto.

45. Per indicare che un numero deve moltiplicarsi per un altro si fa uso del segno $\times$, ovvero di un punto, i quali si

scrivono fra il moltiplicando ed il moltiplicatore, e si leggono *moltiplicato per*. Così per indicare che 3 deve moltiplicarsi per 2, si scrive 3×2, ovvero 3.2, e si legge *3 moltiplicato per 2*.

Allorchè ciascuno de' fattori o un solo di essi è una somma di più numeri indicata dal segno $+$, la moltiplicazione si accenna chiudendo in parentesi ciascun fattore che è somma di più numeri. Così, il numero $5+4$ dovendosi moltiplicare per $3+2$, si scriverà $(5+4)\times(3+2)$, e si leggerà *5+4 moltiplicato per 3+2*. Così pure, $5+4$ dovendosi moltiplicare per 3, si scriverà $(5+4)\times3$.

46. Dalla definizione che si è data della moltiplicazione dei numeri interi, risulta che essa si riduce ad un' addizione di più numeri uguali. In effetti, dovendo moltiplicarsi 5 per 4, il prodotto sarà $5+5+5+5$, ossia 20; vale a dire, esso si forma addizionando tanti numeri uguali al moltiplicando, quante unità sono nel moltiplicatore.

Ma se volessimo trovare il prodotto di due numeri mediante l'addizione successiva del moltiplicando con sè stesso, l'operazione non solo sarebbe penosa, ma diverrebbe impraticabile quando il moltiplicatore è sufficientemente grande: ecco perchè si è cercato il modo di eseguirla facilmente, come ben tosto vedremo.

47. Nella moltiplicazione dei numeri interi possono darsi i tre seguenti casi.

I. Allorchè il moltiplicando ed il moltiplicatore sono di una cifra.

II. Allorchè il moltiplicando è di più cifre, ed il moltiplicatore di una cifra.

III. Allorchè tanto il moltiplicando che il moltiplicatore sono di più cifre.

48. Il principio su cui poggia la regola della moltiplicazione dei numeri interi si è che un numero decomposto in parti si moltiplica per un altro, moltiplicando ciascuna parte del primo per il secondo, e poi sommando i prodotti parziali. In effetti, è manifesto che un tutto si ripete più volte, p. es. 7 volte, ripetendo ciascuna parte 7 volte.

Questo principio si può riguardare come evidente, ma acquista il massimo grado di chiarezza immaginando che il numero decomposto in parti sia scritto tante volte quante unità sono nel mol-

tiplicatore in diverse linee orizzontali, in modo che le parti eguali si corrispondano in colonne verticali, come si vede qui affianco rispetto al numero $8+3+7+2$, ossia 20, composto dalle parti 8, 3, 7, 2, il quale si vuole moltiplicare per 5. Così ne risulta un quadro di unità composto dal numero ripetuto 5 volte; ma questo stesso quadro si compone da colonne verticali, ognuna delle quali contiene ciascuna parte del numero ripetuta pure 5 volte; perciò, tanto è ripetere il moltiplicando 5 volte, quanto è ripetere ciascuna parte 5 volte e poi sommare i prodotti parziali; quindi si ha che

$8+3+7+2$
$8+3+7+2$
$8+3+7+2$
$8+3+7+2$
$8+3+7+2$

$$(8+3+7+2)\times 5=8\times5+3\times5+7\times5+2\times5=40+15+35+10=95.$$

COROL. Avendosi una somma di più numeri, i quali hanno un fattor comune, essa può decomporsi in due fattori, uno dei quali è il fattore comune, e l'altro è la somma dei numeri per i quali esso fattore è moltiplicato. Così p. es. avendosi la somma $8\times7+3\times7+5\times7$ di tre numeri, che hanno per fattore comune 7 il quale è moltiplicato per i numeri 8, 3, 5; questa somma è uguale al fattore comune 7 moltiplicato per la somma di numeri 8, 3, 5, cioè si ha $8\times7+3\times7+5\times7=(8+3+5)\times7=16\times7=112$.

MOLTIPLICAZIONE DI DUE NUMERI DI UNA CIFRA FRA LORO.

49. La moltiplicazione di un numero di una cifra per un altro di una cifra non può farsi altrimenti che con l'addizione di tanti numeri uguali al moltiplicando, quante unità sono nel moltiplicatore. Così p. es. dovendosi moltiplicare 6 per 5, il prodotto sarà $6+6+6+6+6$, e poichè effettuando questa addizione indicata, si ottiene per somma 30, un tal numero sarà il prodotto di 6 per 5.

Ma siccome occorre spessissimo conoscere i prodotti di due numeri semplici, giova perciò formare questi prodotti una volta per sempre, e scriverli in un quadro, per poi mandarli a memoria, affinchè nelle occorrenze si abbiano pronti senza bisogno di fare alcuna operazione per trovarli. Pitagora, filosofo greco, inventò una tavola, nella quale si trovano registrati con la massima semplicità ed ordine i prodotti di due numeri semplici comunque combinati. A questa tavola si dà il nome di *tavola di moltiplicazione*, ovvero *tavola pitagorica* in onore di colui che ne fu l'inventore: essa si forma nel seguente modo.

Considerando che in questa tavola debbono esservi tutti i numeri semplici presi una volta, due volte, tre volte, ec. sino a nove volte; è chiaro che essa si formerà scrivendo tutti questi numeri col loro ordine di grandezza in una linea orizzontale, perciò in questa linea si troveranno tutti i numeri semplici presi una volta. Poi sotto questa prima linea orizzontale si scriveranno in una seconda linea i medesimi numeri ripetuti due volte, il che si ottiene addizionando ciascun numero della prima linea con sè stesso. Indi al di sotto della seconda linea si scriveranno in una terza linea tutti i numeri semplici ripetuti tre volte, il che si consegue addizionando ciascun numero della seconda linea con quello che gli sta al di sopra nella prima linea.

Similmente si proseguirà finchè si giunge alla nona linea, dove si rattroveranno tutti i numeri semplici ripetuti 9 volte, in tal guisa verrà a formarsi la seguente tavola.

Direzione orizzontale

Direzione verticale

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81
10	20	30	40	50	60	70	80	90
11	22	33	44	55	66	77	88	99
12	24	36	48	60	72	84	96	108

È chiaro poi che per trovare, per esempio, in questa tavola 5 ripetuto 7 volte, bisognerà cercarlo nella settima linea in

quel posto che corrisponde al di sotto del 5 nella prima linea, e si troverà essere 35 il prodotto cercato. In una maniera consimile si troveranno nella medesima tavola i prodotti di due numeri semplici qualsivogliano.

Facciamo intanto osservare che questa tavola potrebbe prolungarsi fin dove si vuole. Prolungandola sino a 12 nella sola direzione verticale, vi si troveranno anche i prodotti di 10, 11, e 12 per qualunque numero semplice; quelli di 10 e di 11 è facilissimo mandarli a memoria, ma è utile conoscere quelli di 12 nelle operazioni che si fanno su i numeri complessi.

MOLTIPLICAZIONE DI UN NUMERO DI PIU' CIFRE PER UN ALTRO DI UNA SOLA CIFRA.

50. *Un numero di più cifre si moltiplica per un altro di una cifra formando i prodotti parziali delle unità, decine, centinaia, ec. del moltiplicando pel moltiplicatore; ma nello scrivere il prodotto delle unità, se esso contiene decine, si scrivono le sole unità, e le decine si ritengono per unirle al prodotto delle decine, e nello scrivere il prodotto delle decine dopo avervi unite quelle riportate dal prodotto delle unità, se vi sono centinaia, si scrivono le sole decine, e le centinaia si ritengono per unirle al prodotto delle centinaia: similmente si prosegue sino all'ultimo prodotto.*

Sia p. es. il numero 5763 che voglia moltiplicarsi per 8. È manifesto che il numero 5763 dovendo ripetersi 8 volte, è lo stesso che ripetere 8 volte le sue 3 unità, le sue 6 decine, le sue 7 centinaia, e le sue 5 migliaia, e formare un numero solo de' diversi prodotti parziali che si ottengono.

Per eseguire ciò scriveremo il moltiplicatore sotto del moltiplicando, come si vede qui di contro, e cominceremo dal moltiplicare le unità per 8; quindi si dirà: 3 unità moltiplicate per 8 fanno 24 unità, cioè 2 decine e 4 unità, si scriveranno le sole 4 unità, e le 2 decine si ritengono per unirle al prodotto delle 6 decine per 8.

$$\begin{array}{r} 5763 \\ 8 \\ \hline 46104 \end{array}$$

Poi passiamo a moltiplicare le 6 decine per 8, e si dirà: 6 decine moltiplicate per 8 fanno 48 decine, alle quali aggiungendo le due decine ritenute, si avranno 50 decine, ma poichè 50 decine formano 5 centinaia e zero decine, si scriverà zero nel posto delle decine, e le 5 centinaia si ritengono per unirle al prodotto delle 7 centinaia per 8.

Indi si passa a moltiplicare le 7 centinaia per 8, e si dirà: 7 centinaia moltiplicate per 8 fanno 56 centinaia, alle quali aggiungendo le 5 centinaia ritenute, si avranno 61 centinaio, e poichè 61 centinaio formano 6 migliaia ed 1 centinaio, il centinaio si scrive nel posto delle centinaia, e le 6 migliaia si ritengono per unirle al prodotto delle 5 migliaia per 8.

Finalmente si passa a moltiplicare le 5 migliaia per 8, e si dirà: 5 migliaia moltiplicate per 8 fanno 40 migliaia, alle quali aggiungendo le 6 migliaia ritenute, si avranno 46 migliaia che si scrivono nel loro posto tali come si sono ottenute, perchè non vi è niente altro a moltiplicare, quindi il prodotto cercato sarà il numero 46104.

MOLTIPLICAZIONE DI DUE NUMERI DI PIU' CIFRE FRA LORO.

51. In PRIMO LUOGO sia da moltiplicarsi un numero di più cifre per un altro le cui cifre sieno l' unità seguita da zeri, cioè per uno dei numeri 10, 100, 1000, ec. si terrà la seguente regola.

Un numero si moltiplica per 10, per 100. per 1000, ec. aggiungendo uno, due, tre, ec. zeri alla sua dritta.

Sia p. e. il numero 384. Aggiungendo un zero alla sua dritta esso diviene 3840, ove la cifra 4 che dinotava unità semplici è passata a dinotar unità di decine che sono 10 volte più grandi delle unità semplici; e la cifra 8 che dinotava decine è passata a dinotar centinaia che sono 10 volte più grandi delle decine, e la cifra 3 la quale dinotava centinaia è passata a dinotar migliaia che sono 10 volte più grandi delle centinaia. Laonde tutte le parti pel numero proposto essendo divenute 10 volte maggiori, il tutto che ne risulta sarà pure 10 volte maggiore, e quindi il proposto numero si sarà moltiplicato per 10.

Similmente si dimostra che se si aggiungono due, tre, ec. zeri a dritta del numero proposto, tutte le sue cifre rappresentano unità 100, 1000, ec. volte più grandi, e perciò il numero proposto si moltiplicherà rispettivamente per 100, per 1000, ec.

52. *COROLLARIO.* Poichè aggiungendo uno, due, tre, ec. zeri a dritta di un numero, esso diviene 10, 100, 1000, ec. volte maggiore; ne segue che sopprimendo uno, due, tre, ec. zeri

dalla dritta di un numero esso diverrà 10, 100, 1000, ec. volte minore.

53. In SECONDO LUOGO, sia da moltiplicarsi un numero di più cifre per un altro che ha una sola cifra significativa seguita da zeri: si terrà la seguente regola.

Si moltiplichi il primo numero per la sola cifra significativa del secondo, e poi si aggiungano a dritta del prodotto tanti zeri quanti ne contiene il secondo numero.

Sia p. e. il numero 35 da moltiplicarsi per 700. Eseguendo la moltiplicazione di 35 per la sola cifra significativa 7, si avrà per prodotto 245; ed aggiungendo due zeri a dritta di 245, si avrà il numero 24500; che sarà il prodotto cercato.

In effetti, sopprimendo i due zeri che sono a dritta del moltiplicatore, esso diviene 100 volte minore, e perciò allorchè moltiplichiamo 35 per 7 veniamo a moltiplicarlo per un numero 100 volte minore del vero, quindi il prodotto 245 che si ottiene sarà pure 100 volte minore del prodotto vero; laonde per avere il giusto prodotto, bisogna moltiplicatore 245 per 100, il che sappiamo che si fa aggiungendo due zeri alla sua dritta: dunque il vero prodotto sarà 24500.

54. In TERZO LUOGO, sieno da moltiplicarsi fra di loro due numeri qualsivogliano di più cifre: si terrà la seguente regola.

Due numeri si moltiplicano fra loro formando i prodotti parziali del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore e scrivendo questi prodotti l' uno sotto l' altro, in modo che quello relativo alla cifra delle decine retroceda di un posto verso sinistra, quello relativo alla cifra delle centinaia retroceda di due posti, e così di seguito, poi si addizionano, e la somma che si otterrà sarà il prodotto totale cercato.

Sia da moltiplicarsi il numero 783 per 564.

Scriviamo il moltiplicando sopra il moltiplicatore, e sotto di questo tiriamo una linea come si vede qui affianco.

È chiaro che si ottiene il prodotto facendo la moltiplicazione del moltiplicando per le unità, per le decine, e per le centinaia del moltiplicatore, e poi sommando i prodotti parziali.

Perciò cominciamo dal moltiplicare il moltiplicando per le 4 unità del moltiplicatore, cosa

```
   783
   564
  ----
  3132
 4698
3915
------
441612
```

che sappiamo fare, e scriviamo il prodotto 3132 sotto la linea. Poi passiamo a moltiplicare il moltiplicando per le 6 decine del moltiplicatore, ossia per 60, ma questo prodotto sappiamo che si ottiene moltiplicando per 6, e poi mettendovi un zero a dritta, e siccome lo zero non influsce sulla somma dei prodotti parziali, scriviamo il prodotto 4698 senza lo zero, sotto del prodotto precedente, in modo che la prima cifra 8 cada sotto la cifra 3 delle decine. Infine passiamo a moltiplicare il moltiplicando per le 5 centinaia del moltiplicatore, ossia per 500, ma il prodotto per 500 si fa moltiplicando per 5, e poi mettendovi due zeri a dritta, e siccome i due zeri non influiscono sulla somma dei prodotti parziali, scriviamo il prodotto 3915 senza i due zeri, sotto il prodotto precedente, in modo che la prima cifra 5 cada sotto la cifra 9 della colonna delle centinaia. Poi sommiamo questi prodotti parziali, e si avrà il prodotto totale, che sarà 441612.

Sia per secondo esempio da moltiplicarsi 9038 per 403.

Qui, dopo scritto il primo prodotto parziale 27114, si osserva che il secondo prodotto parziale, cioè quello del moltiplicando per la cifra delle decine del moltiplicatore è zero; perciò si passa a moltiplicare il moltiplicando per la cifra 4 delle centinaia, ed il prodotto 36152 si deve scrivere in modo che la prima cifra 2 cada nella colonna delle centinaia, cioè due posti indietro del primo prodotto, perchè vi andrebbero due zeri a dritta. Indi si sommano i due prodotti parziali, e si avrà il prodotto totale 3642314.

```
   9038
    403
  -----
  27114
 36152
-------
3642314
```

Sia per terzo esempio a moltiplicarsi 8532 per 70036.

Qui, dopo scritti i due primi prodotti parziali 51192 e 25596, siccome gli altri due seguenti relativi alle cifre delle centinaia e migliaia del moltiplicatore sono eguali a zero, perchè queste cifre sono zero, si passa a moltiplicare per la cifra 7 delle decine di migliaia, ed il prodotto 59724 si scrive tre posti indietro del primo prodotto; e poi si sommano i tre prodotti parziali ottenuti, e si avrà il prodotto totale 597547152.

```
     8532
    70036
    -----
    51192
   25596
59724
---------
597547152
```

55. *Due numeri che hanno zeri a dritta si moltiplicano fra loro*

55. *I numeri che hanno zeri a dritta si moltiplicano fra loro trascurando i zeri, e poi aggiungendo a dritta del prodotto i zeri trascurati.*

Supponiamo che un sol fattore abbia zeri a dritta, p. e. due; sopprimendo questi zeri, esso diviene 100 volte minore, perciò moltiplicandolo per l' altro fattore, il prodotto sarà pure 100 volte minore del vero, quindi dovrà moltiplicarsi per 100 per avere il vero prodotto, il che si fa aggiungendo alla sua dritta i due zeri soppressi.

Se poi ambedue i fattori avessero zeri a dritta, come avviene se dovesse moltiplicarsi 64000 per 7100; per quel che ora abbiamo detto, possiamo ottenere il prodotto sopprimendo i due zeri a dritta del moltiplicatore e moltiplicare 64000 per 71, e poi aggiungere a dritta del risultato i due zeri soppressi; ma, per la stessa ragione, per moltiplicare 64000 per 71 possiamo moltiplicare 64 per 71 ed aggiungere i tre zeri del moltiplicando a dritta del prodotto, e siccome poi vi si debbono aggiungere due altri zeri, ne segue che il prodotto si ottiene moltiplicando i due fattori senza i zeri, e poi aggiungendo a dritta del prodotto i zeri soppressi.

56. Il prodotto della differenza di due numeri per un terzo numero, si può ottenere moltiplicando prima il diminuendo e poi il diminutore pel terzo numero; e poi togliendo dal primo prodotto il secondo.

Così p. e. il prodotto $(8-3)\times5=8\times5-3\times5=40-15=25$.

In effetti, moltiplicando prima 8 per 5 il prodotto 8×5 è maggiore del vero, perchè 8 deve prima diminuirsi di 3 e poi moltiplicarsi per 5; dunque il prodotto 8×5 supera il prodotto vero di 3×5; perciò il prodotto vero sarà $8\times5-3\times5=40-15=25$.

PROVA DELLA MOLTIPLICAZIONE.

57. *La prova della moltiplicazione può farsi eseguendo di bel nuovo l' operazione con prendere il moltiplicando per moltiplicatore, e se si ottiene un prodotto eguale al primitivo, è segno che l' operazione era stata ben fatta.*

Perchè i prodotti parziali essendo diversi, difficilmente nel sommarli può incorrersi nel medesimo errore; ed il prodotto sarà lo stesso, perchè non si altera permutando l' ordine dei fattori.

Così p. e. dovendosi moltiplicare 348 per 271 si trova per prodotto 94308. Ora, per verificare se il prodotto sia giusto, si farà di nuovo l'operazione prendendo il moltiplicando per moltiplicatore, come si vede qui affianco; e poichè si trova anche per prodotto 94308, è segno che quello ottenuto è esatto.

```
  271
  348
 ----
 2168
1034
813
-----
94308
```

N. B. La prova della moltiplicazione può anche farsi per mezzo della divisione, come vedremo dopo di aver imparata la divisione.

PRODOTTO DI PIU' FATTORI.

58. Avendo più numeri, come p. e. i quattro numeri 8, 5, 2, 7; se occorresse che il primo 8 debba moltiplicarsi pel secondo 5, e poi il prodotto 40 che ne nasce debba moltiplicarsi pel terzo 2, ed il nuovo prodotto 80 che si ottiene debba moltiplicarsi pel quarto 7; l'ultimo risultato a cui si giunge, il quale è 500, si chiama *prodotto* de' quattro numeri dati.

Dunque, se si propone a fare il *prodotto di più numeri*, significa che il primo deve moltiplicarsi pel secondo, e poi il prodotto che ne nasce per il terzo, ed il nuovo prodotto che si ottiene per il quarto, e così di seguito, sino all'ultimo numero. Ciò si esprime anche dicendo, che i numeri proposti debbono moltiplicarsi *successivamente* fra loro.

TEOREMI RELATIVI ALLA MOLTIPLICAZIONE.

59. *Il prodotto di due numeri non cambia se s'inverte l'ordine dei fattori.*

Sia 5 da moltiplicarsi per 8: dico che il prodotto è uguale a quello di 8×5.

Difatti, ponendo invece di 5 le sue unità, che le chiudiamo in parentesi, verrà $5\times8=(1+1+1+1+1)\times8$; ma questo prodotto si ottiene ripetendo ciascuna unità 8 volte, perciò viene uguale ad $8+8+8+8+8$, ossia ad 8×5; quindi tanto è moltiplicare 5 per 8 quanto 8 per 5.

60. *Se si moltiplica un numero pel prodotto di due fattori, si ottiene lo stesso risultato che si ha moltiplicandolo pri-*

ma per uno de' due fattori, e poi il prodotto che ne nasce per l' altro.

Sia p. e. il numero 9 da moltiplicarsi per 42, che è il prodotto di 7 per 6: dico che tanto è moltiplicare 9 per 42, quanto è moltiplicarlo prima per 7, e poi il prodotto 63 chè ne nasce per 6.

Essendo $42=7\times6$, il solo fattore 7 sarà 6 volte minore del prodotto 42; laonde, se invece di moltiplicare 9 per 42, lo moltiplichiamo pel fattore 7, veniamo a moltiplicarlo per un numero 6 volte minore; perciò il prodotto 63 che ne risulta sarà pure 6 volte minore del prodotto vero 9×42, dunque per avere il vero prodotto, converrà moltiplicare 63 per 6; e quindi il prodotto vero 9×42 sarà uguale a 63×6, ossia a $9\times7\times6$.

61. *Il prodotto di più fattori non cambia comunque si permuti l' ordine dei fattori.*

È manifesto che il teorema rimarrà dimostrato quando avremo fatto vedere che un fattore qualunque può trasferirsi in qualsivoglia posto, senza che il prodotto si alteri.

Sia il prodotto 2.8.5.7.4.9, in cui faremo vedere che il fattore 7 può passare in qualunque posto, senza che il prodotto cambiasse valore. Consideriamo il prodotto formato dal primo fattore 2 sino al fattore 7 come un prodotto di tre fattori, due dei quali sieno 7 e 5, e l' altro sia il prodotto dei fattori a sinistra di 5, che chiudiamo in parentesi per indicare che li consideriamo come un sol numero, che è il loro prodotto; quindi verrà $2.8.5.7=(2.8)\times5.7$; ora tanto è moltiplicare il numero in parentesi prima per 5 e poi per 7 quanto è moltiplicarlo pel prodotto di 5 e 7; e tanto è moltiplicarlo pel prodotto di 5 e 7 quant' è moltiplicarlo prima per 7 e poi per 5; perciò si avrà che $(2.8).5.7=(2\times8)\times7\times5$, e togliendo le parentesi, viene infine $2.8.5.7=2.8.7.5$. Dunque possiamo porre 2.8.7.5 invece di 2.8.5.7 nel prodotto proposto, e si avrà $2.8.5.7.4.9=2.8.7.5.4.9$; perciò il fattore 7 può trasferirsi di un posto verso sinistra senza che il prodotto si alterasse.

Per la stessa ragione può trasferirsi successivamente per tutti gli altri posti verso sinistra, senza che il prodotto cambi.

Inoltre esso può trasferirsi anche verso dritta, senza che il prodotto cambiasse di valore, e ciò si consegue traspor-

tando il fattore 4 verso sinistra, perchè allora il fattore 7 passerà di un posto verso dritta. Similmente procedendo si può far passare per tutti gli altri posti verso dritta; quindi resta dimostrato che un fattore qualsivoglia può trasferirsi in qualunque posto, senza che il prodotto cambiasse valore, il che equivale a dire che invertendo comunque l' ordine dei fattori il prodotto non si altera.

62. *Se si moltiplica un numero pel prodotto di più fattori, si ottiene lo stesso risultato che si ha moltiplicandolo successivamente per ciascuno dei fattori.*

Sia p. e. il numero 65 da moltiplicarsi pel prodotto dei quattro fattori 2, 7, 5, 3, ch' è 210. Dico che il prodotto di 64 per 210 è uguale a quello che si ottiene moltiplicando prima 64 per 2, e poi il prodotto 128 che ne nasce per 7, ed indi il prodotto 896 che n' emerge per 5, ed infine il terzo prodotto 4480 che ne risulta per 3.

Difatti $64.210=210.64=2.7.5.3.64$; e facendo passare 64 nel primo posto, si avrà $64.210=64.2.7.5.3$.

NUMERO DELLE CIFRE DI UN PRODOTTO.

63. *Il prodotto di due fattori ha tante cifre quante ne sono nei due fattori, o una di meno.*

Abbia 5 cifre il moltiplicando e 3 il moltiplicatore; il prodotto sarà minore di quello che si ha dal moltiplicare il moltiplicando pel minimo numero di 4 cifre, e sarà uguale o minore di quello che si ha dal moltiplicare il moltiplicando pel minimo numero di 3 cifre; ma il primo prodotto si ottiene mettendo tre zeri a dritta del moltiplicando, perciò è di 8 cifre; ed il secondo prodotto si ottiene mettendo due zeri a dritta del moltiplicando, perciò è di 7 cifre; dunque il prodotto non può avere più di 8 cifre, nè meno di 7; quindi avrà tante cifre quante ne sono nei due fattori, o una di meno.

ESERCIZII.

I. In Napoli muoiono (in media) 38 individui al giorno, e ne nascono 45. Quanti ne muoiono e ne nascono in un anno, che è 365 giorni?

II. Il suono in ogni minuto secondo fa un cammino di 340 metri. Il fragore del tuono si è inteso 23 secondi dopo l' apparizione del lampo: si domanda a qual distanza sia la nube tempestosa.

III. Il raggio della terra, è di 3480 miglia. La distanza del sole dalla terra è di 24000 raggi terrestri. Qual' è la distanza in miglia della terra dal sole?

IV. Il Sole è 1284500 volte più grande della Terra, e la Terra 80 volte più grande della Luna. Quante volte il Sole è più grande della Luna?

V. Un negoziante ha comprato 586 ettolitri di vino al prezzo di 26 lire l' ettolitro; ne vende 250 al prezzo di lire 32 l' ettolitro, e vende il resto al prezzo di lire 30; quanto costa tutto il vino comprato, e quanto è il guadagno che ha fatto?

DIVISIONE DEI NUMERI INTERI.

64. La *divisione* è quell' operazione aritmetica in cui essendo dato un prodotto ed un fattore si cerca l'altro fattore.

Il prodotto dato si chiama *dividendo*, il fattore noto si chiama *divisore*, ed il fattore che si cerca si chiama *quoziente* o *quoto*.

Osserviamo intanto che la stessa operazione bisogna fare allorchè si vuol dividere un numero in tante parti eguali quante unità sono in un altro; perchè una di queste parti ripetuta tante volte quante lo dinota il secondo numero produce il primo numero. Perciò il numero da dividersi può considerarsi come un prodotto, ossia come il dividendo; quello che denota in quante parti deve dividersi è un fattore, e può prendersi come il divisore; ed una delle parti eguali che si cerca è l' altro fattore, ossia il quoziente.

Inoltre osserviamo che bisogna fare anche la stessa operazione allorchè si cerca quante volte un numero contiene un altro minore; poichè il maggiore si compone dal minore preso tante volte quante lo denota il numero che si cerca. Perciò il numero maggiore può riguardarsi come un prodotto ovvero come un dividendo; il minore può riguardarsi come un fattore ovvero come il divisore; ed il numero che si cerca è l' altro fattore ossia il quoziente.

Da quel che si è detto si raccoglie che le tre questioni enunciate, cioè, di dividere un numero in parti eguali, o di trovare quante volte un numero contiene un altro minore, o di trovare il fattore di un prodotto allorchè è conosciuto il prodotto e l' altro fattore, si riducono a fare sempre la stessa operazione che dicesi *divisione*.

65. Per indicare che un numero deve dividersi per un altro si fa uso di una linea orizzontale, scrivendo il dividendo sopra di essa ed il divisore sotto; e si fa anche uso di due punti l'uno sotto l'altro, mettendo il dividendo a sinistra ed il divisore a dritta dei due punti. Tanto la linea quanto i due punti si leggono *diviso per*. Così p. e. volendo indicare che 8 deve dividersi per 4, si scriverà $\frac{8}{4}$, ovvero 8 : 4; e si leggerà *8 diviso per 4*.

66. Allorchè un numero è uguale ad un altro minore preso un numero intero di volte, il maggiore si dice *multiplo* o *multiplice* del minore, e viceversa, il minore si dice *summultiplo*, o *summultiplice*, o *parte aliquota* del maggiore. Così p. e. 20 è *multiplo* o *multiplice* di 4, e 4 è *summultiplo* o *summultiplice*, o *parte aliquota* di 20.

Considerando poi i casi particolari, un numero che contiene due volte, tre volte, quattro volte, sino a dieci volte un altro, si dice rispettivamente *doppio*, *triplo*, *quadruplo*, *quintuplo*, *sestuplo*, *settuplo*, *ottuplo*, *nonuplo*, *decuplo* dell'altro, ma al di là di dieci si dice *undici volte maggiore*, *dodici volte maggiore*, ec. dell'altro (*).

67. Allorchè un numero si vuol dividere in parti eguali, se le parti sono due si dicono *metà* o *parti mezze*, e ciascuna è un mezzo o la metà del numero; se sono tre, diconsi *terzi* o *parti terze*, e ciascuna è un terzo del numero; similmente diconsi *quarti* o *parti quarte*, *quinti* o *parti quinte*, *sesti* o *parti seste*, *settimi* o *parti settime*, *ottavi* o *parti ottave*, *noni* o *parti none*, *decimi* o *parti decime*. Se poi sono più di dieci, si aggiunge la desinenza *esime* al numero che denota in quante parti si è diviso il numero dato. Così p. e. se il numero si divide in 11, in 19, o in 25 parti eguali, ciascuna si dice rispettivamente la parte *undicesima*, la parte *diciannovesima*, la parte *venticinquesima* del numero dato.

Per scrivere in un modo abbreviativo la parte di un numero, come p. e. la settima, si scrive così, *la parte 7ª*.

68. Un numero qualunque può contenere diversi multipli

(*) La desinenza *uplo* suole anche darsi ai numeri di due sillabe dove ciò non facesse cattivo suono: tali sono i numeri venti, trenta, cento, potendosi dire *ventuplo*, *trentuplo*, *centuplo*.

di un altro numero minore: il più grande di questi si dice il *maggior multiplo* del minore contenuto nel maggiore. Così p. e. 34 contiene diversi multipli di 5, che sono 5, 10, 15, 25, 30; il più grande di questi, che è 30, è il maggior multiplo di 5 contenuto in 34.

69. Allorchè il dividendo non è un multiplo del divisore, esso contiene il divisore un certo numero di volte, e contiene dippiù un certo numero di unità minore del divisore, questo numero di unità che contiene dippiù si chiama *resto* o *avanzo* della divisione.

In questi casi si chiama *quoziente* quel numero intero che denota quante volte il divisore è contenuto nel dividendo; ma questo quoziente è incompleto perchè non denota una delle parti eguali in cui si divide il dividendo, e per renderlo completo bisogna aggiungervi il resto diviso in un numero di parti eguali indicato dal divisore. Così p. e. volendosi dividere 38 in 7 parti eguali, siccome 7 è contenuto 5 volte in 38 con l'avanzo 3, 5 non è il *quoziente completo,* perchè non è la settima parte di 38, ma questa settima parte si compone dal quoziente 5 più la settima parte del resto 3, la quale si scrive affianco il quoziente col segno che indica la divisione di 3 per 7, ed il segno che si usa è la linea; perciò il *quoziente completo* sarà $5+\frac{3}{7}$.

La divisioue si dice *esatta* quando risulta senza resto, cioè quando il dividendo è un multiplo del divisore.

70. Quando la divisione non viene esatta, il resto essendo l'avanzo del dividendo sul prodotto del divisore pel quoziente ne segue che, ***il dividendo è uguale al divisore moltiplicato per il quoziente, più il resto.***

Così p. e. dovendosi dividere 51 per 9, siccome 9 è contenuto 5 volte in 51 con l'avanzo di 6; il dividendo 51 è uguale al divisore 9 moltiplicato per il quoziente 5, più l'avanzo 6, il che si scrive così, $51=9\times5+6$.

Il quoziente completo poi moltiplicato per il divisore, produce il dividendo esattamente; difatti, il prodotto è $\left(5+\frac{3}{7}\right)\times7$ che è uguale a $5\times7+\frac{3}{7}\times7$, e siccome la settima parte di 3 ripetuta 7 volte riproduce lo stesso numero 3; perciò il pro-

dotto del quoziente completo pel divisore sarà $5 \times 7 + 3$, cioè sarà eguale al dividendo 38, perchè risulta eguale al divisore moltiplicato per il quoziente, più il resto.

71. Nella divisione consideriamo tre casi.

1.° Quando il divisore è di una cifra, ed il dividendo non è maggiore del decuplo del divisore, che dicesi *caso semplice*.

2.° Quando il quoziente tiene una cifra.

3.° Quando il divisore ed il quoziente hanno più cifre, che è il *caso generale*.

72. Il PRINCIPIO su cui poggia la divisione dei numeri, si è che, se un numero composto da più parti si divide per un altro, il quoziente è uguale alla somma dei quozienti che si ottengono dividendo ciascuna parte del primo numero per il secondo.

Così p. e. il numero 20 composto dalle parti 9, 6, e 5 volendosi dividere per 8, il quoziente sarà eguale alla somma dei quozienti $\frac{9}{8} + \frac{6}{8} + \frac{5}{8}$.

In effetti, è manifesto che 20 componendosi dalle parti 9, 6, e 5, l'ottava parte di 20 si compone dall'ottava parte di 9, più l'ottava parte di 6, più l'ottava parte di 5.

La stessa cosa può anche dimostrarsi nel seguente modo:

Per provare che $\frac{20}{8} = \frac{9}{8} + \frac{6}{8} + \frac{5}{8}$ bisogna provare che moltiplicando la somma dei tre quozienti pel divisore 8 si ottiene per prodotto 20. Or questo è vero, perchè sappiamo che la somma di più numeri si moltiplica per 8 moltiplicando ciascuno di essi per 8, e poi sommando i risultati; ma l'ottava parte di 9 presa 8 volte dà 9, e l'ottava parte di 6 presa 8 volte dà 6, e l'ottava parte di 5 presa 8 volte dà 5; dunque il prodotto cercato sarà $9+6+5$ ossia 20; perciò il quoziente di $9+6+5$, ossia di 20 diviso per 8, è $\frac{9}{8} + \frac{6}{8} + \frac{5}{8}$.

73. *Corol.* Il quoziente di una divisione è uguale alla parte dell'unità indicata dal divisore presa tante volte quante lo denota il dividendo. Così p. e. 5 diviso per 9 è uguale a 5 *noni* di un'unità; perchè essendo $5 = 1+1+1+1+1$, sarà $\frac{5}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$, vale a dire che 5 diviso per 9 pareggia *un nono* dell'unità ripetuto 5 volte che fa 5 *noni*. Dunque tanto è prendere la nona parte di 5 unità,

quanto è dividere un' unità in 9 parti eguali e prenderne 5; perciò $\frac{5}{9}$ si può leggere in due modi, cioè *5 unità diviso per 9*, e *5 noni dell' unità*.

CASO SEMPLICE DELLA DIVISIONE.

74. In questo caso la divisione si fa a mente, mediante la tavola pitagorica, la quale fa conoscere quante volte il dividendo contiene il divisore.

Così p. e. dovendosi dividere 65 per 7, la tavola di Pitagora fa conoscere che 7 è contenuto 9 volte in 65 con l' avanzo di 2 unità, perchè 7 per 9 fa 63, e per giungere a 65 ci vogliono 2 unità.

In questo caso la divisione deve sapersi fare speditamente, perchè esso serve a tutti gli altri casi. E però dovendosi p. e. dividere 51 per 6, 79 per 8, 36 per 5, e 54 per 9; dovrà con prontezza dirsi:

6 in 51 è contenuto 8 volte con l' avanzo 3;

8 in 79 è contenuto 9 volte con l' avanzo 7;

5 in 36 è contenuto 7 volte con l' avanzo 1;

9 in 54 è contenuto 6 volte con l' avanzo zero, ossia senza avanzo; e perciò quì la divisione è esatta.

Suole anche dirsi: la sesta parte di 51 è 8, ed avanza 3; l' ottava parte di 79 è 9, ed avanza 7; la quinta parte di 36 è 7, ed avanza 1; la nona parte di 54 è 6 esattamente.

CASO IN CUI IL QUOZIENTE TIENE UNA CIFRA.

75. Il quoziente avrà una cifra allorchè il dividendo ne ha tante quante ne sono necessarie per contenere il divisore.

Ciò avviene quando il dividendo ha tante cifre quante ne ha il divisore e contiene il divisore, ovvero ha una cifra dippiù, ma senza quella a dritta non conterrebbe il divisore. In effetti, in questi casi il divisore non può entrare 10 volte nel dividendo, altrimenti aggiungendo un zero alla sua dritta per moltiplicarlo per 10, il prodotto sarebbe contenuto nel dividendo, ma esso risulta maggiore, perchè ha un numero di decine maggiore di quante ne ha il dividendo.

Così p. e. se dovesse dividersi 4923 per 876, dove il di-

videndo ha tante cifre quante ne sono necessarie per contenere il divisore, mettendo un zero a dritta del divisore, questo diviene 8760, ed ha 876 decine, mentre il dividendo ne ha 492 che è minore di 876, perchè per ipotesi il dividendo senza la cifra a dritta è minore del divisore.

REGOLA DELLA DIVISIONE QUANDO IL QUOZIENTE TIENE UNA CIFRA.

76. *Si cerca quante volte la cifra a sinistra del divisore è contenuta nella prima cifra a sinistra del dividendo, o nel numero formato dalle due prime cifre se il dividendo ha una cifra dippiù del divisore, e la cifra che si otterrà sarà quella del quoziente, purchè multiplicata pel divisore il prodotto si possa togliere dal dividendo, altrimenti bisogna diminuirla di tarte unità finchè il prodotto di essa pel divisore possa togliersi dal dividendo. Poi si toglierà questo prodotto dal dividendo, e si avrà il resto della divisione.*

Sia p. e. il numero 4921 da dividersi per 876.

Il quoziente essendo minore di 10, perchè il dividendo ha tante cifre quante ne sono necessarie per contenere il divisore, si può trovare cercando a mente quante volte le 8 centinaia del divisore sono contenute nelle 49 centinaia del dividendo; perciò si dirà: 8 centinaia in 49 centinaia sono contenute 6 volte con l' avanzo di 1 centinaio che unito alle 2 decine fa 12 decine; ma bisogna assicurarsi se le 7 decine del divisore sono pure contenute 6 volte nelle 12 decine rimaste nel dividendo, e siccome non vi sono contenute, la cifra 6 del quoziente è maggiore della vera; perciò bisogna diminuirla di una unità e vedere se fosse 5, e si dirà: 8 centinaia in 49 centinaia sono contenute 5 volte con l' avanzo di 9 centinaia che unite alle 2 decine fanno 92 decine; le 7 decine del divisore in 92 decine sono contenute 5 volte con l' avanzo di tante decine che unite alle 3 unità fanno un numero di unità in cui le 6 unità del divisore sono contenute 5 volte; dunque la cifra del quoziente è 5.

Ora per avere l' avanzo del dividendo sul divisore preso 5 volte, moltiplicheremo il divisore per il quoziente, e toglieremo il prodotto 4380 dal dividendo, e siccome si ottiene per resto 541, sarà 541 l' *avanzo o resto* della divisione.

Questa divisione non essendo riuscita esatta perchè ha dato un resto, il quoziente 5 che si è ottenuto non è il quoziente completo, cioè non è la 876^{esima} parte del divisore, ma vi rimangono altre 541 unità a dividersi in 876 parti eguali; quindi per avere il quoziente completo conviene aggiungere al quoziente 5 la parte 876^{esima} di 541 che si accenna mediante la linea di divisione, e si scrive affianco a 5; perciò il quoziente completo sarà $5 + \frac{541}{876}$.

L' operazione s' intavola scrivendo il divisore a dritta del dividendo, ed il quoziente sotto il divisore, separando il dividendo dal divisore con una linea verticale, ed il divisore dal quoziente con una linea orizzontale, come si vede qui affianco.

4921	876
4380	5
541	

77. Sia per secondo esempio a dividersi 8307 per 2769.

Qui pure il quoziente tiene una cifra perchè il dividendo ha tante cifre quante ne ha il divisore.

Per trovare poi la cifra del quoziente si cerca quante volte la cifra 2 delle migliaia del divisore è contenuta nella cifra 8 delle migliaia del dividendo, e si dirà: 2 migliaia in 8 migliaia sono contenute 4 volte senza avanzo, ma le 7 centinaia del divisore non sono contenute 4 volte nelle 3 centinaia del dividendo; dunque la cifra 4 del quoziente è maggiore della vera, perciò si diminuisce di un' unità e si prende 3, e si dirà: 2 migliaia in 8 migliaia sono contenute 3 volte con l' avanzo di 2 migliaia che unite alle 3 centinaia fanno 23 centinaia; le 7 centinaia del divisore in 23 centinaia sono contenute 3 volte con l' avanzo di 2 centinaia che unite alle zero decine fanno 20 decine; in cui le 6 decine del divisore sono contenute 3 volte con l' avanzo di 2 decine che unite alle 7 unità fanno 27 unità, in cui le 9 unità del divisore sono contenute giusto 3 volte; perciò 3 è la cifra del quoziente. Or siccome questa cifra moltiplicata pel divisore, e tolto il prodotto dal dividendo si ha per resto zero, ne segue che la divisione riesce esatta.

8307	2769
0000	3

78. *Avvertimento I.°* Per brevità, nella pratica non si fa il prodotto totale del quoziente pel divisore e poi si toglie; ma, a misura che si ottiene ciascun prodotto parziale del quo-

ziente per ciascuna cifra del divisore, si esegue la sottrazione a mente col metodo del n.° 41, come si vede qui affianco.

Perciò nel primo esempio si dirà: 6 per 5, 30, che tolto da 31 resta 1, e si porta 3; 7 per 5, 35, e 3 fanno 38 che tolto da 42 resta 4; 8 per 5 fa 40, e 4 fanno 44, che tolto da 49 resta 5; perciò il resto della divisione è 541.

4921	876
541	5

Nel secondo esempio si dirà: 2 in 8 è contenuto 4 volte senza avanzo, ma 7 in 3 non è contenuto 4 volte, perciò si dirà: 2 in 8 è contenuto 3 volte con l' avanzo 2 che messo innanzi a 3 fa 23, il 7 in 23 è contenuto 3 volte con l' avanzo 2 che messo innanzi a zero fa 20, il 6 in 20 è contenuto 3 volte con l' avanzo 2 che messo innanzi a 7 fa 27, il 9 in 27 è contenuto 3 volte; dunque 3 è la cifra del quoziente. Questa si moltiplica pel divisore, e si dirà: 3 per 9 fa 27 che tolto da 27 resta zero e si porta 2; 3 per 6 fa 18, e 2 che si portano fa 20 che tolto da 20 resta zero e si porta 2, 3 per 7 fa 21 e 2 che si portono fa 23 che tolto da 23 resta zero e si porta 2; 3 per 2 fa 6 e 2 che si portano fa 8 che tolto da 8 resta zero.

8307	2769
0000	3

79. *Avvertimento II.°* La cifra del quoziente si può ritenere di essere giusta, allorchè l' avanzo del dividendo parziale è maggiore della cifra del divisore che sta a dritta di quella che si è veduto quante volte entrava nel dividendo parziale.

Così p. e. dovendosi dividere 259803 per 84697; intavolando l' operazione come qui affianco, si dirà: l' 8 in 25 è contenuto 3 volte con l' avanzo 1, che messo innanzi a 9 fa 19; il 4 in 19 è contenuto 3 volte con l' avanzo 7, il quale essendo maggiore di 6, si è sicuro che la cifra 3 del quoziente è giusta.

259803	84697
5712	3

Primieramente osserviamo che quando l' avanzo è 9 la cifra del quoziente si può ritenere come giusta, anche se le rimanenti cifre del dividendo sieno tutte zero, e le rimanenti del divisore fossero tutte 9, che sarebbe il caso più sfavorevole; perchè allora deve dirsi: 9 messo avanti a zero fa 90, ed il 9 in 90 è contenuto 9 volte con l' avanzo 9 che messo avanti a zero fa 90, ed il 9 in 90 è contenuto 9 volte con

l' avanzo 9 ; e similmente seguitando si vede che il divisore è contenuto nel dividendo. Or questo con più ragione verificandosi quando l' avanzo è maggiore di 9, resta dimostrato che se l'avanzo è maggiore di 8 la cifra del quoziente è giusta.

Se poi l' avanzo parziale fosse maggiore della cifra seguente del divisore ; supponiamo che l' avanzo sia 9, ed 8 la cifra seguente del divisore; e consideriamo il caso più sfavorevole in cui le cifre seguenti del dividendo sieno tutte zero, e le seguenti del divisore siano tutte 9 ; allora si dirà : 9 messo avanti a zero fa 90, l' 8 in 90 è contenuto 9 volte con l' avanzo maggiore di 9, ma quando l' avanzo è maggiore di 9 la cifra del quoziente è giusta. La stessa cosa si verifica per gli avanzi 8, 7, 6, sino ad 1, quando le cifre seguenti del dividendo hanno un'unità di meno, cioè sono rispettivamente 7, 6, 5, sino a zero, e quindi con più ragione ciò sarà vero, se avessero più unità di meno.

REGOLA DELLA DIVISIONE NEL CASO GENERALE.

80. *Si separino dalla sinistra del dividendo tante cifre quante ne sono necessarie per fare un numero che contenga il divisore, il quale numero si chiama* primo dividendo parziale; *si divida questo numero pel divisore e si avrà la cifra a sinistra del quoziente; si moltiplichi questa cifra pel divisore ed il prodotto si tolga dal dividendo parziale; affianco al resto si abbassi la cifra seguente del dividendo, ed il numero che ne risulta sarà un* secondo dividendo parziale, *il quale si dividerà pel divisore e si avrà la cifra seguente del quoziente; si operi rispetto a questa cifra come si è fatto rispetto alla prima, e si prosegua così finchè siansi abbassate tutte le cifre del dividendo.*

Allorchè, dopo abbassata una cifra del dividendo, il divisore non è contenuto nel dividendo parziale si pone un zero nel quoziente, e poi si abbassa la seguente cifra del dividendo per avere il nuovo dividendo parziale, ed indi si continua la divisione.

Sia da dividersi 195243 per 246.

Scriviamo il dividendo a sinistra del divisore, e sotto del divisore il quoziente, separando il dividendo dal divisore con una linea verticale, ed il divisore dal quoziente con una linea orizzontale, come si vede qui affianco.

```
195243 | 246
2304   |----
 903   | 793
 165
```

Cominciamo dal dividere le unità dell'ordine più alto del dividendo pel divisore; perciò queste unità debbono essere tante quante ne sono necessarie per fare un numero che contenga il divisore.

Ecco perchè separiamo con un segno, p. e. un *apice*, dalla sinistra del dividendo tante cifre quante ne bisognano per fare un numero che contenga il divisore; nel nostro caso bisogna separare quattro cifre che fanno il numero 1952 il quale rappresenta centinaia, e si chiama ***primo dividendo parziale;*** questo numero si dividerà pel divisore, e la divisione si sa fare perchè il quoziente è di una cifra, e questa sarà la cifra delle centinaia del quoziente cercato, la quale viene eguale a 7, e moltiplicata pel divisore, e tolto il prodotto dal dividendo parziale 1952, restano 230 centinaia.

Ora passiamo a trovare la cifra delle decine del quoziente, perciò dividiamo pel divisore le decine che restano nel dividendo, le quali si ottengono abbassando affianco alle 230 centinaia che vi sono rimaste la cifra 4 delle decine, che pure si segna con un apice per ricordare che si è abbassata, e ne verranno 2304 decine, che formano un ***secondo dividendo parziale*** il quale si dividerà pel divisore, e si avrà per quoziente 9 che sarà la cifra delle decine del quoziente, essa perciò si scrive a dritta della cifra 7 delle centinaia, e poi la moltiplichiamo pel divisore, e togliamo il prodotto dal dividendo parziale 2304, e restano 90 decine.

Infine passiamo a trovare la cifra delle unità del quoziente, perciò dividiamo pel divisore le unità che restano nel dividendo, le quali si ottengono abbassando affianco alle 90 decine che vi sono rimaste la cifra 3 delle unità, che pure si segna con un apice, e ne verranno 903 unità che formano un terzo dividendo parziale, il quale si dividerà pel divisore, e si avrà per quoziente 3 che sarà la cifra delle unità del quoziente, e perciò la scriviamo a dritta della cifra 9 delle decine, e poi la moltiplichiamo pel divisore, e togliamo il prodotto dal dividendo parziale 903, e poichè restano 165 unità, la divisione non viene esatta, ed il quoziente cercato è 793.

Il quoziente completo poi si compone da 793 più la 246*esima* parte del resto 165; perciò viene eguale a $793 + \frac{165}{246}$.

Potrebbe riepilogarsi la dimostrazione nel seguente modo.

Essendosi presa la 246^{esima} parte di tutte le centinaia del dividendo, che è stata 7 centinaia, e poi la 246^{esima} parte delle decine in esso rimaste, che è stata 9 decine, ed infine si è presa la 246^{esima} parte delle rimanenti unità, che è stata 3 unità, ne segue che il quoziente si compone di 7 centinaia, di 9 decine, e di 3 unità; perciò esso è uguale a 793; e siccome vi sono rimaste 165 unità di cui deve prendersi la 246^{esima} parte, questa parte, che è (n.° 73) uguale a $\frac{165}{246}$ dell' unità, si aggiunge affianco al quoziente, e si avrà il quoziente completo to che abbiamo scritto poco anzi.

81. Sia ora a dividersi 92974 per 458. Si separano dalla sinistra del dividendo tre cifre, perchè tante ne bisognano per fare un numero che contenga il divisore; si avrà così il dividendo parziale 929 che dinota centinaia; perciò diviso per 458 la cifra 2 del quoziente che si ottiene dinota pure centinaia; si moltiplicano queste 2 centinaia pel divisore, ed il prodotto tolto dal dividendo parziale restano 13 centinaia. Affianco a queste centinaia si abbassa la cifra 7 delle decine e si avranno le decine rimaste nel dividendo che sono 137; si passa a dividere queste decine per 458, e siccome il divisore è maggiore del dividendo parziale 137, ciò vuol dire che il quoziente non contiene decine; perciò si pone un zero nel luogo delle decine, cioè a dritta della cifra 2, e si abbassa affianco alle 137 decine rimaste nel dividendo la cifra 4 delle unità, e si avranno 1374 unità che restano a dividersi pel divisore, il che fatto, si otterrà la cifra delle unità del quoziente che è 3. Si moltiplicano queste 3 unità pel divisore, ed il prodotto si toglie dalle 1374 unità del dividendo, e poichè resta zero, la divisione riesce esatta, ed il quoziente è 203,

92974	458
1374	203
0000	

82. Ecco per esercizio due altri esempi.

Sia da dividersi 43544687 per 531. Eseguendo l' operazione come si vede qui affianco, allorchè si è giunto al terzo dividendo parziale 26, siccome esso non contiene il divisore 531 bisogna porre un zero nel quoziente, ed abbassare a dritta di 26 la cifra 8 del dividendo, e poichè il quarto dividendo parziale 268

43544687	531
1064	82005
2687	
32	

che ne risulta è pure minore del divisore bisogna porre un altro zero nel quoziente, ed abbassare a dritta di 268 la seguente cifra 7 del dividendo, e così si avrà il numero 2687 chè diviso pel divisore darà l'altra cifra 5 del quoziente, la quale moltiplicata pel divisore, e tolto il prodotto dal dividendo parziale 2687, resta 32, perciò il quoziente è 82005, ed il resto è 32.

Sia infine a dividersi 2128600 per 734.

Effettuando l'operazione come si vede qui di contro, siccome dopo abbassata la cifra zero del dividendo a dritta del secondo resto che è zero, il terzo dividendo parziale risulta anche zero, si deve porre un zero nel quoziente, e si abbasserà la rimanente cifra zero del dividendo, e poichè il quarto dividendo parziale che si ottiene è pure zero, si dovrà porre un altro zero nel quoziente; quindi il quoziente viene eguale a 2900; e la divisione riesce esatta, perchè non vi è alcun resto.

2128600	734
6606	2900
000000	

83. Allorchè il divisore tiene una cifra, la divisione si esegue facilmente, dividendo successivamente le unità dei diversi ordini del dividendo pel divisore, cominciando da quella dell'ordine più alto; e riesce comodo porre le cifre del quoziente sotto quelle del dividendo che sono dello stess' ordine; il resto poi si porrà sotto del divisore, senza mettere linea di separazione fra questi due numeri (*).

Così p. e. dovendosi dividere 8476 per 3, cominciamo dal dividere le 8 migliaia per 3, e si ha la cifra delle migliaia del quoziente la quale è 2, e si scrive sotto le 8 migliaia del dividendo, come si vede qui affianco; ma perchè restano 2 migliaia nel dividendo che unite a mente alle 4 centinaia fanno 24 centinaia, passiamo a dividere le 24 centinaia per 3, e si avrà la cifra delle centinaia del quoziente la quale è 8, e si scrive sotto le centinaia del dividendo; e poichè non vi restano centinaia, passiamo a dividere le 7 decine del dividendo per 3, e si avrà la cifra delle decine del quoziente, che è 2, e si scrive sotto la cifra 7 delle decine del dividendo; e sic-

8476	3
2825	1

(*) Qui abbiamo fatto la divisione ragionando, perchè il ragionamento è facile a capirsi; e dopo abbiamo messo la regola pratica.

come vi avanza una decina che aggiunta alle 6 unità fa 16 unità, passiamo a dividere le 16 unità del dividendo per 3, e si ha la cifra delle unità del quoziente, che è 5, e si scrive sotto le unità del dividendo; perciò il quoziente cercato è 2825, ed il resto della divisione è 1 che si scrive sotto al divisore.

Praticamente si dirà: 3 in 8 è contenuto 2 volte con l' avanzo 2, che messo avanti a 4 fa 24; il 3 in 24 è contenuto 8 volte con l' avanzo zero che messo avanti a 7 fa 7; il 3 in 7 è contenuto 2 volte con l' avanzo 1 che messo avanti a 6 fa 16; il 3 in 16 è contenuto 5 volte con l' avanzo 1; perciò il quoziente è 2825, ed il resto della divisione è 1.

Si suole anche dire: La terza parte di 8 è 2, (e si scrive 2 sotto ad 8); la terza parte di 24 è 8, (e si scrive 8 sotto a 4); la terza parte di 7 è 2, (e si scrive 2 sotto a 7); la terza parte di 16 è 5, (e si scrive 5 sotto a 6), e l' avanzo 1 sotto al divisore 3.

Ecco per esercizio altri tre esempi, che bisogna si verificassero dagli allievi.

132500042	5	84923509	4	371532	7
26500008	2	21230877	1	53076	0

84. *Allorchè il divisore tiene zeri a dritta si possono sopprimere questi zeri ed altrettante cifre a dritta del dividendo; indi si farà la divisione dei numeri che ne risultano, e si avrà il quoziente; il resto poi si avrà scrivendo a dritta del resto ottenuto le cifre che si sono soppresse nel dividendo.*

Così p. e. dovendosi dividere 742351 per 8000; sopprimeremo i tre zeri a dritta del divisore e tre cifre a dritta del dividendo; e divideremo il numero 742 per 8, ed il quoziente 92 che si ottiene sarà il cercato; indi affianco al resto 6 scriveremo le tre cifre che avevamo soppresse nel dividendo, e si avrà il resto della divisione, che sarà 6351.

Dim. Siccome le unità dell' infimo ordine del divisore sono migliaia, scomporremo il dividendo in due parti, una delle quali sia quella a dritta della cifra delle migliaia, e si avrà $742351 = 742000 + 351$; dunque l' operazione si riduce a vedere quante volte 742 migliaia più 351 unità contengono 8 migliaia; perciò dobbiamo dividere 742 per 8; e siccome si ha per quoziente 92 e per resto 6 migliaia, il quale è sempre minore del divisore, se aggiungiamo a questo resto le

351 unità soppresse che sono meno di un migliaio, si avrà il numero 6351 minore del divisore, che sarà il resto totale della divisione

85. *Un numero si divide per 10, 100, 1000, ec. separando con una virgola rispettivamente una, due, tre, ec. cifre dalla sua dritta; il numero a sinistra della virgola esprimerà il quoziente, e quello a dritta esprimerà il resto della divisione.*

Sia p. e. il numero 8357 da dividersi per 10. Separando con una virgola una cifra dalla dritta, il numero 825 a sinistra della virgola sarà il quoziente, ed il numero 7 a dritta il resto.

Dim. Scomponiamo il numero proposto in due parti, una delle quali sia la cifra delle unità, si avrà $8357 = 8350 + 7$. Ora la prima parte 8340 divisa per 10 dà per quoziente 835 (n.° 52), e l'altra parte 7 non contiene 10; quindi si vede che il numero proposto $8550 + 7$ diviso per 10, dà per quoziente 825 e per resto 7.

Se poi si dovesse dividere per 100, 1000, ec.; il ragionamento procederebbe similmente, col solo divario che il numero proposto deve scomporsi in due parti, una delle quali sia quella formata dalle due cifre a dritta, o dalle tre cifre a dritta, ec.

86. *Se un numero deve dividersi per 11, può farsi la divisione come quella di un numero di più cifre per un altro di una cifra.*

59726	11
5429	7

Così dovendosi dividere il numero 59726 per 11; perchè si sa che 11 è contenuto 2 volte in 22, 3 volte in 33, 4 in 44, ec., disponendo l'operazione come qui affianco, si dirà: 11 in 59 è contenuto 5 volte con l'avanzo 4, che posto avanti a 7 fa 47; l'11 in 47 è contenuto 4 volte con l'avanzo 3, che posto avanti a 2 fa 32; l'11 in 32 è contenuto 2 volte con l'avanzo 10, che posto avanti a 6 fa 106; l'11 in 106 è contenuto 9 volte con l'avanzo 7. Perciò il numero 59726 diviso per 11 dà per quoziente 5429, e per resto 7.

PRUOVA DELLA DIVISIONE.

87. La prova della divisione può farsi moltiplicando il quoziente pel divisore, ed aggiungendo al prodotto il resto della

divisione; se la somma risulta eguale al dividendo, è segno che l'operazione è stata ben fatta.

Dim. Ciò perchè sappiamo che il dividendo è uguale al divisore moltiplicato per il quoziente, più il resto.

NUMERO DELLE CIFRE DEL QUOZIENTE.

88. *Il quoziente ha tante cifre quant'è la differenza fra il numero delle cifre del dividendo ed il numero delle cifre del divisore, o una dippiù.*

Prima di tutto osserviamo che le cifre del quoziente sono una dippiù di quante sono le cifre del dividendo che si abbassano affianco ai resti delle divisioni parziali; perchè, per ogni cifra che si abbassa, se ne ha una nel quoziente, e l'altra dippiù vien data dalla divisione del primo dividendo parziale. Ora, se nel fare la divisione convien separare dalla sinistra del dividendo tante cifre quante ne ha il divisore, quelle che si abbassano sono quant'è la differenza fra il numero delle cifre del dividendo ed il numero delle cifre del divisore; perciò il quoziente ha una cifra dippiù di quante ne indica la cennata differenza. Ma se bisogna separare una cifra dippiù di quante ne ha il divisore, le cifre che si abbassano sono una di meno della detta differenza, perciò il quoziente, che deve avere una cifra dippiù, ne avrà quante ne indica la medesima differenza.

TEOREMI RELATIVI ALLA DIVISIONE.

89. *Se un numero divide esattamente le due parti di un altro numero, dividerà tutto il numero; e se divide esattamente tutto il numero ed una sua parte, dividerà pure l'altra parte.*

Sia il numero 4 che divide esattamente le due parti 20 e 12 di 32; esso dividerà esattamente 32. Perchè il quoziente di 32 diviso per 4 è uguale alla somma dei quozienti delle parti 20 e 12 divise per 4; ma questi quozienti sono interi, dunque la somma è un intero; il che vuol dire che 32 è divisibile esattamente per 4.

Abbiasi poi il numero 4 che divida un altro 32 composto dalle parti 20 e 12, e divida la parte 20; dividerà anche esattamente l'altra parte 12. In effetti, il quoziente di 32

diviso per 4 è uguale alla somma dei quozienti delle sue parti 20 e 12 divise por 4; ma 32 diviso per 4 è un quoziente intero, dunque la somma dei detti quozienti è pure intera; ma il quoziente di 20 diviso per 4 e intero, dunque 12 diviso per 4 deve essere pure intero, affinchè aggiunto a 20 diviso per 4, la somma sia intera.

90. *Se un numero divide esattamente il fattore di un prodotto, dividerà esattamente il prodotto.*

Sia il numero 6 che divide esattamente il fattore 24 del prodotto 24×15; esso dividerà esattamente il prodotto. Perchè il prodotto essendo eguale a $24+24+24+$ec.; ma 6 divide tutte le parti di questo prodotto, perciò dividerà tutto il prodotto.

91. *Se il prodotto di più fattori si divide pel prodotto di alcuni suoi fattori, il quoziente sarà il prodotto dei rimanenti fattori.*

Sia il prodotto 5.4.3.9.7, che voglia dividersi pel prodotto 4.7 dei due fattori 4 e 7, il quoziente sarà il prodotto 5.3.9 dei rimanenti fattori.

Dim. Passiamo i due fattori 4 e 7 a dritta del prodotto, e chiudiamoli in parentesi, come pure chiudiamo in parentesi i rimanenti fattori, per mettere in evidenza che il prodotto equivale a quello di due fattori. Si avrà così

$$5.4.3.9.7=(5.3.9)\times(4.7);$$

ma il secondo membro essendo un prodotto di due fattori, se si divide pel secondo fattore dà per quoziente il primo; dunque anche il prodotto proposto diviso per 4.7 darà per quoziente 5.3.9, che è il prodotto dei rimanenti fattori.

Corol. Se un prodotto di più fattori, in cui la moltiplicazione è accennata e non eseguita, deve dividersi pel prodotto di alcuni di questi fattori, basta sopprimere i detti fattori.

92. *Un prodotto si divide per un numero, dividendo un suo fattore per questo numero* (*).

(*) Si noti bene che il fine di questa proposizione è di mostrare che se un prodotto si divide per un numero, si avrà lo stesso risultato che si ottiene dividendo un suo fattore per lo stesso numero e moltiplicando il quoziente pel prodotto dei rimanenti fattori. E però è diverso dal fine propostoci nel n.° 90, dove si è detto che se il fattore è divisibile per un numero, il prodotto sarà pure divisibile per lo stesso numero, senza badare al valore dei quozienti, i quali, come è chiaro, sono diversi.

Sia il prodotto $7\times36\times25$ da dividersi per 9; ciò può farsi dividendo per 9 il fattore 36, il quale siccome dà per quoziente 4, il quoziente cercato sarà $7\times4\times25$.

Difatti, essendo $36=9\times4$, se mettiamo 9×4 invece di 36 nel prodotto dato, esso verrà eguale a $7\times9\times4\times25$; ma questo si divide per 9 sopprimendo il fattore 9, ed il quoziente è $7\times4\times25$, cioè è uguale a quello ottenuto dividendo il suo fattore 36 per 9.

93. *Se un numero si divide pel prodotto di più fattori, si ottiene lo stesso quoziente che si ha dal dividere il numero successivamente per ciascuno di questi fattori.*

Sia p. e. il numero 180 il quale si divide per 30, che è il prodotto dei fattori 3, 5, e 2, e dà per quoziente 6; dico che se dividiamo 180 pel fattore 3, e poi il quoziente 60 pel fattore 5; ed infine il nuovo quoziente 12 pel fattore 2, si ottiene per quoziente 6, cioè quello ottenuto dal dividere 180 per 30.

Indichiamo con a il dividendo, con b il divisore, e con q il quoziente completo; si avrà l'eguaglianza $a=b\times q$. Supponiamo che il divisore b sia il prodotto di tre fattori c, d, e, sicchè si abbia $b=c\times d\times e$; ponendo questo valore di b nell'eguaglianza precedente verrà $a=c\times d\times e\times q$. Ora se dividiamo a pel fattore c, e chiamiamo q' il quoziente completo, e poi dividiamo q' pel fattore d, e chiamiamo q'' il quoziente completo, ed infine dividiamo q'' pel fattore d e chiamiamo q''' il quoziente completo: dico che si avrà $q'''=q$.

In effetti, dividiamo i due membri dell'eguaglianza $a=c\times d\times e\times q$ per c, siccome a diviso per c dà per quoziente q', ed il secondo membro dà per quoziente $d\times e\times q$, si avrà $q'=d\times e\times q$; e dividendo il primo ed il secondo membro di questa eguaglianza per d, siccome q' diviso per d dà per quoziente q'', ed il secondo membro dà per quoziente $e\times q$, verrà perciò $q''=e\times q$; e dividendo i due membri di questa eguaglianza per e, siccome q'' diviso per e dà per quoziente q''', ed il secondo membro dà per quoziente q, verrà perciò $q'''=q$.

La proposizione dimostrata è vera quando sono i quozienti completi che dividonsi successivamente per i fattori del divisore. Non pertanto allorchè i fattori del divisore sono numeri interi, e si dividono per essi le successive parti intere dei quozienti completi, la parte intera dell'ultimo quoziente è anche eguale alla parte intera del quoziente che si ha dalla divisione di a per b. Per dimostrarlo osserviamo pri-

mieramente che se un numero intero contiene un altro numero intero q volte, il primo numero aumentato di una frazione conterrà anche q volte lo stesso numero intero. In effetti, il resto della divisione è sempre minore del divisore, perciò affinchè questo resto contenesse un'altra volta il divisore dovrebbe essere aumentato almeno di un'unità, quindi se esso si aumenta di una frazione non può contenere più di q volte il divisore; il che equivale a dire che se il dividendo si aumenta di una frazione la parte intera del quozlente rimane la stessa.

Ciò posto, se dividendo a per c il quoziente completo è q', e se poi la parte intera di q' si divide pel fattore d, deve ottenersi la stessa parte intera del quoziente q'' che si ottiene dal dividere il quoziente completo q' per d; e continuando a dividere la parte intera del quoziente q'' per e, deve ottenersi la stessa parte intera che si ottiene dal dividere il quoziente completo q'' per e; cioè si otterrà la parte intera del quoziente completo q, la quale si ottiene dal dividere a per b.

Così p. e. se 250 deve dividersi per 70, che è il prodotto dei fattori 5, 2, 7, esso dà per quoziente 3 e per resto 40. Or se dividiamo 250 pel fattore 7 di 70, si ha per quoziente 35, e per resto 5; e se poi dividiamo la parte intera 35 del quoziente pel fattore 2, si avrà per quoziente 17 e per resto 1; e se infine si divide la parte intera 17 del quoziente per l'altro fattore 5, si avrà per quoziente 3, e per resto 2; perciò la parte intera del quoziente sarà eguale alla parte intera che si è ottenuta dividendo 250 successivamente per i fattori 7, 5, 2.

ESERCIZII.

N. B. Per risolvere le seguenti quistioni bisogna conoscere che il *miglio* italiano è uguale a 1852 *metri*, che il *chilogrammo* si divide in 100 *decagrammi*, che la *lira* si divide in 100 *centesimi*, e che l'*ora* si divide in 60 *minuti primi*, ed il minuto primo in 60 *minuti secondi*.

I. Debbonsi ripartire 3120 chilogrammi di pane a 256 poveri: quanti chilogrammi e decagrammi toccano a ciascuno?

Risposta: 12 chilogrammi e 22 decagrammi.

Avvertiamo che, dopo ottenuti i chilogrammi del quoziente, vi restano nel dividendo 58 chilogrammi da dividersi per 156, questi chilogrammi si ridurranno in decagrammi moltiplicandoli per 100, perchè il chilogrammo è uguale a 100 decagrammi, ed il numero che ne risulta si dividerà per 156, e così si avranno anche i decagrammi del quoziente, i quali si aggiungeranno ai chilogrammi ottenuti, e si otterrà il quoziente cercato espresso in chilogrammi e decagrammi, come è detto nella risposta.

II. Un negoziante ha fatto trasportare da Sicilia in Napoli un carico di solfo di 740 tonnellate, che portato nel magazzino gli è costato lire 103500: quanto gli costa ogni tonnellata?

Risposta: lire 137 e 16 centesimi.

Avvertiamo che dopo ottenuto il prezzo della tonnellata in lire, vi

restano nel dividendo 12 lire da dividersi per 740, queste lire si ridurranno in centesimi moltiplicandole per 100, ed il numero che ne risulta si dividerà per 740, e così si avranno i centesimi di lira che aggiunte alle lire ottenute, si avrà il prezzo di ciascuna tonnellata espresso in lire e centesimi di lira, come è detto nella risposta.

III. Supponiamo che da un certo punto in poi sotto la superficie della Terra, p. e. da 30 metri in sotto, penetrando al di dentro, la temperatura aumenti di 30 metri. A qual profondità, in miglia, essa diverrà in 1500 gradi, ove è la temperatura a cui si fonde il ferro martellato, il più tardo a fondersi fra i metalli?

Risposta: alla profondità di 24 miglia.

L'ipotesi di questo problema è un fatto stabilito dall'esperienza; ed alla profondità ordinariamente non maggiore di 30 metri trovasi uno strato di temperatura invariabile eguale ad un di presso alla media del luogo, al di là del quale essa va sempre crescendo di un grado per ogni 30 metri.

IV. La massima velocità di una locomotiva è di 70 miglia ad ora, e la regolare di miglia 25. Quant'è in metri, per ogni secondo, la velocità massima e la regolare?

Risposta: la massima è di 2160 metri a secondo, e la regolare di 771.

V. La distanza della Luna dalla Terra è di 60 raggi terrestri: il raggio della Terra è 3480 miglia: la più grande velocità sperimentata della palla di un cannone, quando esce dal pezzo, è di 745 metri a secondo. Quanto tempo questa palla impiegherebbe per giungere dalla Terra alla Luna, se conservasse sempre la detta velocità.

Risposta: 6 giorni, 10 primi, e 57 secondi.

CAP. III.

POTENZE E RADICI DEI NUMERI — RESTI DELLE DIVISIONI — DIVISIBILITA' — NUMERI PRIMI — MASSIMO COMUN DIVISORE — MINIMO MULTIPLO — DIVISORI DI UN NUMERO.

POTENZE E RADICI DEI NUMERI.

94. Il prodotto di più fattori eguali ad uno stesso numero si chiama *potenza* di questo numero, e questo numero si chiama *radice* rispetto alla sua potenza.

La potenza di un numero si dice *seconda*, *terza*, *quarta*, ec. secondo che i fattori eguali che la formano sono due, tre, quattro, ec.; ed il numero si dice rispettivamente *radice seconda*, *terza*, *quarta*, ec. rispetto alla sua potenza.

Così p. e. i prodotti 8.8, 7.7.7, 5.5.5.5, che sono eguali a 64, a 343, a 625, si dicono rispettivamente potenza seconda di 8, potenza terza di 7, e potenza quarta di 5; e viceversa 8 è la radice seconda di 64, e 7 è la radice terza di 343, e 5 è la radice quarta di 625.

Per analogia ogni numero si dice *potenza prima* di sè stesso.

Alle potenze seconda e terza di un numero si danno anche i nomi di *quadrato* e di *cubo*, ed il numero si dice *radice quadrata*, o *cubica* rispetto al suo quadrato, o al suo cubo. Così 36 è il quadrato di 6, e 216 è il cubo di 6, mentre 6 è radice quadrata di 36 ed è radice cubica di 216.

Quando di un numero se ne forma una certa potenza si dice che si *eleva a potenza;* e quando di un numero si trova la radice si dice che se n' *estrae la radice.*

Per indicare un prodotto di più fattori eguali, ossia per indicare che un numero deve elevarsi a potenza, invece di scrivere il numero tante volte quante deve prendersi come fattore, si scrive una sola volta ponendo sopra del medesimo, dalla parte dritta, un altro numero che abbia tante unità quante volte il primo deve prendersi come fattore. Così volendo indicare che 4 deve elevarsi a potenza terza, e 2 a potenza quinta, si scriverà 4^3, e 2^5, leggendosi *4 elevato a 3, e 2 elevato a 5.* Il numero *3* o il numero *5* che espone il *grado* della potenza si chiama *esponente.*

Per indicare che da un numero deve estrarsi la radice di un certo *grado*, si fa uso del segno $\sqrt{}$, che si dice *segno radicale*, mettendosi a dritta del segno il numero da cui deve estrarsi la radice, ed alla sinistra sull' apertura del segno si mette il numero che indica il grado della radice da estrarsi, e che si chiama *indice del radicale.* Così p. e. per indicare che deve estrarsi la radice seconda o quadrata da 49, e la radice terza o cubica da 27, e la radice quinta da 32, si scriverà $\sqrt[2]{49}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[5]{32}$, leggendosi: *radice quadrata di 49, radice cubica di 27, e radice quinta di 32.* Quando si tratta di radice quadrata si tralascia di porre l' indice al radicale. Così la radice quadrata di 25 si scrive $\sqrt{25}$.

95. Per elevare effettivamente un numero a potenza bisogna moltiplicarlo successivamente per sè stesso tante volte quante unità meno una tiene l' esponente. Così dovendo elevarsi 5 a potenza terza, bisogna moltiplicarlo successivamen-

te due volte per sè stesso: la prima volta si ha $5.5=25$, e poi $25.5=225=5^3$.

96. Per elevare un prodotto a potenza basta elevare a potenza ciascun suo fattore. In effetti, se p. e. il prodotto $5\times7\times9$ deve elevarsi a potenza terza, si avrà

$$(5\times7\times9)^3=5\times7\times9\times5\times7\times9\times5\times7\times9\ ;$$

e ravvicinando i tre fattori eguali a 5, ed i tre eguali a 7, ed i tre eguali a 9, verrà $(5.7.9)^3=5^3.7^3.9^3$.

Da ciò segue che la radice di un prodotto può estrarsi estraendola da ciascun suo fattore; e quindi allorchè si vede a colpo d'occhio che un fattore è potenza esatta del grado della radice da estrarsi, questo fattore può cacciarsi fuori del radicale estraendone la radice: Così p. e. dovendo estrarsi la radice quadrata da 48 che è uguale al prodotto di 16 per 3, e scorgendosi che 16 è quadrato esatto di 4, si estrarrà la radice del fattore 16, e si avrà $\sqrt{48}=\sqrt{16.3}=4\sqrt{3}$. In tal modo la radice invece di estrarsi da 48 si estrarrà dal numero più semplice 3.

Viceversa, un fattore di un radicale può farsi entrare sotto del radicale elevandolo alla potenza indicata dall'indice del radicale. Così p. e. nel prodotto $5\sqrt[3]{4}$ il fattore 5 può farsi entrare sotto il radicale elevandolo a potenza terza, e si avrà $5\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{125.4}=\sqrt[3]{500}$. In effetti, estraendo la radice quadrata da 125 che è cubo perfetto di 5, si ritorna al prodotto proposto.

97. Se due potenze del medesimo numero debbono moltiplicarsi fra loro, basta sommare gli esponenti. Così dovendo moltiplicarsi 5^4 per 5^3, il prodotto sarà 5^7; perchè esso formandosi da 5 preso tante volte come fattore quante unità sono nei due esponenti 4 e 3, sarà uguale a 5 con l'esponente 7 che è somma degli esponenti dei fattori.

Viceversa, avendosi due potenze del medesimo numero, se voglia dividersi la maggiore per la minore, si avrà per quoziente la potenza dello stesso numero con un esponente eguale alla differenza degli esponenti del dividendo e del divisore. Così p. e. 7^5 diviso per 7^2 darà per quoziente 7^3.

Difatti, il dividendo essendo un prodotto che ha per fattori il quoziente ed il divisore, l'esponente del dividendo è uguale alla somma degli esponenti del quoziente e del diviso-

re; perciò se si toglie dall' esponente del dividendo l'esponente del divisore, deve rimanervi l' esponente del quoziente.

RESTI DELLE DIVISIONI — CARATTERI DI DIVISIBILITÀ.

98. Un numero si dice *divisibile* per un altro quando contiene esattamente quest' altro; cioè quando il primo è multiplo del secondo.

Un numero divisibile per 2 si chiama numero *pari*.

Se non è divisibile per due si chiama numero *impari*, *dispari*, o *caffo*.

99. *Il resto della divisione di un numero per 2 o per 5, è quello che si ha dividendo la cifra delle unità per 2 o per 5.*

Sia p. e. il numero 4897. Scomponiamolo in due parti, una delle quali sia la cifra delle unità, e si avrà $4897=4890+7$; ma $4890=489\times10$, perciò si avrà $4897=489\times10+7$. Dunque il resto della divisione di 4897 per 2 o per 5 sarà quello che si ha dal dividere il secondo membro per 2 o per 5; ma la prima parte 489×10 di esso secondo membro è divisibile esattamente per 2 o per 5, perchè il fattore 10 è divisibile per 2 e per 5; dunque il resto sarà quello che si ha dal dividere la seconda parte del secondo membro, ossia la cifra 7 per 2 o per 5; perciò se questa cifra è divisibile per 2 o per 5, il numero sarà divisibile per 2 o per 5.

Corol. *Un numero è divisibile per 2 solo quando è terminato a dritta da cifra pari o da zero.*

Un numero è divisibile per 5 solo quando è terminato a dritta da zero o da 5.

100. *Il resto della divisione di un numero per 4 o per 25, è quello che si ha dal dividere il numero formato dalle due cifre a dritta per 4 o per 25.*

Scomponiamo il numero in due parti, una delle quali sia quella formata dalle due cifre a dritta, perciò si avrà $8943=8900+43$; ma $8900=89\times100$, quindi verrà

$$8943=89\times100+43;$$

dunque il resto della divisione di 8943 per 4 o per 25 sarà quello che si ottiene dal dividere il secondo membro per 4 o per 25; ma la prima parte 89×100 del secondo membro è divisibile per 4 e per 25, perchè il fattore 100

si può dividere per 4 e per 25; dunque il resto sarà quello che si ha dal dividere la rimanente parte del secondo membro, ossia il numero 43 formato dalle cifre a dritta, per 4 o per 25.

COROL. *Un numero è divisibile per 4 o per 25 solo quando le due cifre a dritta fanno un numero divisibile per 4 o per 25.*

101. Scomponendo un numero in due parti, una delle quali sia quella formata dalle tre cifre a dritta, si prova similmente che il resto della divisione di un numero per 8, è quello che si ottiene dal dividere il numero formato dalle tre cifre a dritta per 8.

COROL. *Un numero è divisibile per 8, solo quando le tre cifre a dritta formano un numero divisibile per 8.*

102. *Il resto della divisione di un numero per 3 o per 9, è quello che si ottiene dividendo la somma delle sue cifre per 3 o per 9.*

Osserviamo primieramente che essendo $10=9+1$, e $100=99+1$, e $1000=999+1$, ec.; ed essendo i numeri 9, 99, 999, ec. tutti divisibili per 9, ne segue che i numeri 10, 100, 1000 sono eguali ad un multiplo di 9 aumentato di 1; quindi ogni numero che ha una sola cifra significativa seguìta da zeri, è uguale ad un multiplo di 9 aumentato della cifra significativa. Così, il numero 400 è uguale ad un multiplo di 9 più 4, perchè siccome 100 è uguale ad un multiplo di 9 più 1, 400 è uguale ad un multiplo di 9 più 4.

Ciò premesso, sia il numero 20475 da dividersi per 3 o per 9. Scomponendolo nelle unità dei diversi ordini, si avrà $20475 = 20000+400+70+5$; e siccome 20000 è uguale ad un multiplo di 9 più 2, e 400 è uguale ad un multiplo di 9 più 4, e 70 è uguale ad un multiplo di 9 più 7, e 5 è uguale ad un multiplo di 9 più 5, la loro somma è uguale ad un multiplo di 9 più la somma delle cifre 2, 4, 7 e 5: e siccome la prima parte, che è un multiplo di 9, è divisibile per 3 e per 9, così il resto che si ha dal dividere il numero per 3 o per 9 sarà quello che si ottiene dal dividere la seconda parte ossia la somma delle sue cifre per 3 o per 9.

COROL. *Un numero è divisibile per 3 o per 9 solo quando la somma delle sue cifre è divisibile rispettivamente per 3 o per 9.*

103. *Il resto della divisione di un numero per 11 si ottiene dividendo per 11 la somma delle cifre di posto impari a contar da*

dritta, più la somma delle differenze fra 11 e ciascuna cifra di posto pari.

Primieramente osserviamo che $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$, ec.; ma i numeri formati dalla cifra 9 scritta un numero pari di volte sono multipli di 11, dunque i numeri formati dall' unità seguìta da un numero pari di zeri sono eguali ad un multiplo di 11 più 1; e quelli formati dall' unità seguìta da un numero impari di zeri sono eguali ad un multiplo di 11 aumentato di 10.

Da ciò segue che un numero formato da una cifra significativa seguìta da un numero pari di zeri, è uguale ad un multiplo di 11 aumentato della cifra significativa; e se è seguìto da un numero impari di zeri è uguale ad un multiplo di 11 aumentato di 10, 20, 30, 40, ec. secondo che la cifra significativa è 1, 2, 3, 4, ec.; ma 20 è uguale ad un multiplo di 11 più la differenza fra 11 e 2, che è 9, e 30 è uguale ad un multiplo di 11 più la differenza fra 11 e 3, che è 8, e 40 è uguale ad un multiplo di 11 più la differenza fra 11 e 4, che è 7; e così di seguito; perciò il numero formato da una cifra significativa seguìta da un numero impari di zeri è uguale ad un multiplo di 11 più la differenza fra 11 e la cifra significativa.

Ciò premesso: sia il numero 781534 da dividersi per 11. Scomponendolo nelle unità dei suoi diversi ordini si ha

$$781534 = 700000 + 80000 + 1000 + 500 + 30 + 4\,;$$

Or siccome i numeri del secondo membro che sono in posto impari cominciando da dritta sono eguali ad un multiplo di 11 aumentato della rispettiva cifra significativa, ed i numeri che sono in posto pari sono eguali ad un multiplo di 11 aumentato della differenza fra 11 e la rispettiva cifra significativa, ne segue che la somma dei detti numeri è uguale ad un multiplo di 11 aumentato della somma delle cifre di posto impari più la somma delle differenze fra 11 e ciascuna cifra di posto pari; e siccome la prima parte, che è un multiplo di 11, è divisibile per 11, ne segue che il resto che si ha dal dividere il numero per 11 sarà quello che si ottiene dal dividere per 11 la somma delle cifre di posto impari a contare da dritta, più la somma delle differenze fra 11 e ciascuna cifra di posto pari.

In questo esempio la somma delle cifre di posto dispari a contar da dritta è $4 + 5 + 8 = 17$, e la somma delle diffe-

renze fra 11 e ciascuna cifra di posto pari è $8+10+4=22$; e siccome $17+22=39$, il resto della divisione per 11 sarà quello che si ha dividendo 39 per 11, cioè 6.

Corol. — *Un numero sarà divisibile per 11 se la somma delle cifre di posto impari aggiunta alla somma delle differenze fra 11 e ciascuna cifra di posto pari sarà divisibile per 11.*

Allorchè si tratta di conoscere solamente se il numero sia divisibile per 11, si può ritenere la seguente regola, che è più semplice.

Un numero è divisibile per 11 quando la differenza fra la somma delle cifre di posto impari e la somma delle cifre di posto pari è divisibile per 11.

In effetti, nell' esempio precedente il resto della divisione per 11 è $4+5+8+11-3+11-1+11-7=11+11+11+4+5+8-(3+1+7)$.

Ora se la differenza $4+5+8-(3+1+7)$ fra la somma delle cifre di posto impari e la somma delle cifre di posto pari è divisibile per 11, ne segue che quando la prima somma è maggiore della seconda, la loro differenza, che è divisibile per 11, dovendosi aggiungere ad $11+11+11$ che fa un numero divisibile per 11, il risultato sarà divisibile per 11; e quando la prima somma è minore della seconda, la loro differenza, che è divisibile per 11, dovendosi togliere da $11+11+11$, il resto sarà anche divisibile per 11, e perciò il numero sarà divisibile per 11. Se poi la differenza fra le due somme è zero, il risultato essendo $11+11+11$, il numero sarà anche divisibile per 11.

Il resto poi della divisione del numero proposto per 11 sarà quello che si ha dividendo per 11 la differenza fra la somma delle cifre di posto impari e la somma delle cifre di posto pari se la prima somma è maggiore della seconda; ma se è minore, sarà la differenza fra il resto di quest' ultima divisione ed 11.

104. *Se si moltiplicano il dividendo ed il divisore per lo stesso numero, e poi si esegue la divisione, il quoziente non cambia; ma il resto sarà uguale al primitivo moltiplicato pel medesimo numero.*

Sia 75 il dividendo e 9 il divisore, sarà 8 il quoziente e 3 il resto della divisione; perciò si avrà l' eguaglianza $75=9\times8+3$. Ora se moltiplichiamo per lo stesso numero, p. e. per 4, i due membri di questa eguaglianza, verrà

$$75\times4=9\times8\times4+3\times4;$$

e dividendo per 9×4 i due membri di questa eguaglianza, ed osservando che la prima parte $9\times8\times4$ del secondo membro divisa per 9×4 dà per quoziente 8, verrà

$$\frac{75\times4}{9\times4}=8+\frac{3\times4}{9\times4};$$

cioè il dividendo 75 moltiplicato per 4, diviso pel divisore 9

moltiplicato per 4, dà il medesimo quoziente 8, a cui deve aggiungersi il resto 3×4 da dividersi per 9×4; perciò il resto che rimane a dividersi è uguale al resto primitivo 3 moltiplicato per lo stesso numero 4.

105. *Se il prodotto ed i suoi fattori si dividono per uno stesso numero, il resto del prodotto equivale a quello che si ottiene dal dividere il prodotto dei resti dei fattori pel medesimo numero.*

Dim. Rappresentiamo (*) con a e b i fattori, con d il divisore e con q e q' i quozienti derivanti dal dividere i fattori a e b pel divisore d, e con r e r' i resti di queste divisioni: si avrà

$$a = d \times q + r, \qquad b = d \times q' + r'.$$

Moltiplichiamo queste due eguaglianze membro a membro, ed i prodotti verranno eguali; ma il prodotto dei primi membri è $a \times b$, e quello dei secondi membri si ottiene chiaramente moltiplicando prima $d \times q + r$ per $d \times q'$, e poi per r', e sommando i risultati; e siccome il prodotto di $d \times q + r$ per $d \times q'$ è evidentemente eguale $d \times q \times d \times q' + r \times d \times q'$, e quello di $d \times q + r$ per r' è uguale a $d \times q \times r' + r \times r'$; perciò il prodotto dei secondi membri sarà $d \times q \times d \times q' + r \times d \times q' + d \times q \times r' + r \times r'$; e poichè deve eguagliare quello dei primi membri, si avrà

$$a \times b = d \times q \times d \times q' + r \times d \times q' + d \times q \times r' + r \times r'.$$

Or siccome il secondo membro di questa eguaglianza ha tre parti divisibili per d, perchè hanno per fattore d, il resto sarà quello che si ottiene dal dividere la rimanente parte $r \times r'$ per d; perciò anche il primo membro $a \times b$ darà per resto quello che si ha dal dividere $r \times r'$ per d, il che bisognava dimostrare.

PROVA DEL 9 PER LA MOLTIPLICAZIONE.

106. *Si dividano il prodotto ed i fattori per 9; poi i resti dei fattori si moltiplichino fra loro ed il prodotto si divida*

(*) Nei casi in cui per fare una dimostrazione evvi bisogno di eseguire moltiplicazioni o divisioni su i numeri, per evitare queste operazioni, abbiamo per lo più rappresentati i numeri con lettere; avendoci l'esperienza mostrato che i giovanetti non incontrano difficoltà a persuadersi bene della dimostrazione fatta con lettere, la quale ha il vantaggio di generalizzare le idee, e di preparare gli allievi ad indicare le grandezze con simboli, come si fa nell'algebra.

anche per 9; se si ottiene un resto eguale a quello ottenuto dal prodotto diviso per 9, è segno che l' operazione si era ben fatta.

Sieno p. e. i due fattori 257 e 634; eseguendo la moltiplicazione si trova, per prodotto 162938.

Ora, per assicurarci se l' operazione siasi ben fatta, si divida il prodotto per 9, e si noti il resto 2; poi si dividano i fattori per 9, e si notino i resti 5 e 4; indi si moltiplichino questi resti fra loro, ed il prodotto 20 si divida per 9, e siccome si ottiene per resto 2, che è eguale a quello ottenuto dal prodotto, ciò è segno che l' operazione si era ben fatta.

Ciò perchè abbiamo dimostrato che se il prodotto ed i fattori si dividono per uno stesso numero, il resto del prodotto è uguale a quello che si ottiene dal dividere il prodotto dei resti dei fattori pel medesimo numero.

La stessa regola, si terrebbe per la prova dell' 11.

I quattro resti ottenuti sogliono scriversi con ordine nei quattro angoli di due linee rette che si tagliano, come si vede qui affianco.

2	2
5	4

Avvertimento. La prova del 9 non farebbe conoscere l' errore, se si fosse commesso uno sbaglio di 9 o di un multiplo di 9, perchè si otterrebbe il medesimo resto, come risulta dal n.° 105.

PROVA DEL 9 PER LA DIVISIONE.

107. *Si dividano il dividendo, il divisore, ed il quoziente per 9; poi si moltiplichi il resto del divisore per quello del quoziente, ed il prodotto si divida per 9, ed il resto che si ottiene si aggiunga al resto primitivo della divisione, e la somma si divida anche per 9; se quest' ultima divisione conduce ad un resto eguale a quello dato dal dividendo primitivo diviso per 9, è segno che la divisione era stata ben fatta.*

Così p. e. Il numero 195243 diviso per 246 dà per quoziente 793 e per resto 165; ora volendo assicurarci che non si è commesso errore, dividiamo il dividendo per 9, e notiamo il resto 6 come si vede qui affianco; poi dividiamo il divisore ed il quoziente per 9, e notiamo i resti 3 ed 1; indi il prodotto dei resti si divida per 9, e siccome il prodotto è 3, che è minore di 9, si avrà per resto lo stesso numero 3; aggiungiamo questo resto al resto 165 della divisione e la somma 168 si divida per 9, e si avrà

6	6
3	1

per resto 6; questo resto essendo eguale a quello del dividendo primitivo diviso per 9, è segno che l'operazione si era ben fatta.

In effetti, siccome il dividendo è uguale al divisore moltiplicato per il quoziente più il resto, si avrà

$$195243=246\times793+165.$$

Ora in questa eguaglianza il resto del secondo membro si ottiene dividendo la prima parte 246×793 per 9, ed aggiungendo il resto a 165, e poi dividendo la somma per 9; ma il resto della prima parte è uguale a quello che si ottiene dal dividere per 9 il prodotto dei resti del divisore e del quoziente (n.° 105); perciò aggiungendosi un tal resto al divisore 165, e dividendosi poi la somma per 9 deve risultarne un resto eguale a quello del primo membro, cioè eguale a quello che si ottiene dal dividere il dividendo per 9, se la divisione era stata ben fatta.

La stessa regola si terrebbe per la prova dell'11.

COMUN DIVISORE, E MASSIMO COMUN DIVISORE DI DUE O PIU' NUMERI.

108. Un numero si dice *divisor comune* di più numeri quando divide esattamente tutti questi numeri.

Così p. e. 8 è divisor comune di 24, 40, e 56, perchè divide esattamente questi numeri.

Quei numeri interi che hanno per divisor comune la sola unità diconsi *primi fra loro.*

Tali sono i numeri 10 e 21, i quali non hanno per divisor comune che la sola unità; difatti, quantunque 10 tenesse per divisori 5 e 2, questi non dividono 21; e sebbene 21 tenesse per divisori 7 e 3, questi non dividono 10.

Al contrario, 15 e 20 non sono primi fra loro, perchè 5 è divisor comune di 15 e 20. Così pure, 7 e 28 non sono primi fra loro, perchè 7 divide sè stesso e divide 28.

Il più grande fra i divisori comuni a più numeri dicesi *massimo comun divisore* dei medesimi. Così p. e. i numeri 36 e 54 avendo per divisori comuni i numeri 2, 3, 6, 9, 18, il più grande fra questi, cioè 18, è il massimo comun divisore di 36 e 54.

109. La ricerca del massimo comun divisore dei numeri poggia sul seguente teorema.

Il massimo comun divisore di due numeri deve anche dividere il resto della loro divisione; ed il massimo comun divisore del divisore e del resto deve anche dividere il dividendo.

Indichiamo con a il dividendo, con b il divisore, con q il quoziente, e con r il resto della divisione. Siccome il dividendo è uguale al divisore moltiplicato pel quoziente più il resto, si avrà l'eguaglianza

$$a = b \times q + r.$$

Or, poichè il comun divisore di a e b divide il primo membro a, deve dividere anche il secondo membro, ma divide la prima parte $b \times q$ del secondo membro, perchè divide il fattore b, dunque deve anche dividere l'altra parte r, ossia il resto della divisione.

Dico ora che il comun divisore del divisore e del resto deve anche dividere il dividendo. In effetti, considerando la stessa eguaglianza $a = b \times q + r$, il comun divisore di b ed r, dividendo b, dividerà il prodotto $b \times q$; dunque divide le due parti $b \times q$ ed r di cui si compone il secondo membro; perciò dividerà tutto il secondo membro, e quindi anche il dividendo a che è uguale al secondo membro.

110. *Il massimo comun divisore del dividendo e del divisore è pure massimo comun divisore del divisore e del resto della divisione.*

Perchè, se il divisore ed il resto avessero un comun divisore più grande, questo dovrebbe dividere anche il dividendo, perciò sarebbe comun divisore del dividendo e del divisore, e sarebbe più grande del massimo comun divisore, il che è assurdo.

RICERCA DEL MASSIMO COMUN DIVISORE DI DUE NUMERI.

111. *Si divida il maggiore pel minore, se la divisione riesce esatta, il numero minore sarà il massimo comun divisore; ma se non viene esatta, si faccia una seconda divisione, prendendo il divisore della prima per dividendo ed il resto per divisore; se questa seconda divisione riesce esatta, il divisore sarà il massimo comun divisore; ma se non viene esatta, si dovranno proseguire similmente le divisioni finchè si giunga ad una divisione senza resto; il divisore di quest'ultima divisione sarà il massimo comun divisore cercato.*

Sieno p. e. i due numeri 4823 e 798, dei quali si voglia il massimo comun divisore.

Si dividerà il numero maggiore 4823 pel minore 798, situando i quozienti delle divisioni al di sopra de' rispettivi divisori, come si vede qui affianco; e poichè si ottiene per resto 35, si passerà a dividere il divisore 798 pel resto 35; e siccome in questa seconda divisione si ottiene pure un resto, che è 28, si passerà ad una terza divisione, in cui il divisore 35 della seconda si prende per dividendo ed il resto 28 per divisore; e poichè in questa terza divisione si ottiene per resto 7, si passerà a dividere il divisore 28 pel resto 7; ma perchè quest' ultima divisione riesce esatta, il divisore 7 della medesima sarà il massimo comun divisore cercato.

	6	22	1	4
4823	798	35	28	7
35	98	7	0	
	28			

Dim. È chiaro che se il numero minore dividesse esattamente il maggiore, il numero minore sarebbe il massimo comun divisore cercato; sarebbe comune, perchè divide il maggiore e divide sè stesso; sarebbe poi massimo, perchè un numero non può avere un divisore più grande di sè stesso.

Bisogna dunque dividere il numero maggiore pel minore, per vedere se il minore fosse il massimo comun divisore dei due numeri dati. Eseguiamo perciò la divisione; e poichè si ottiene per resto 35, ne conchiuderemo che il numero minore non è il massimo comun divisore; ma perchè sappiamo (n.° 110) che il massimo comun divisore di 4823 e 798 è pure massimo comun divisore di 798 e del resto 35, passeremo a trovare il massimo comun divisore fra 798 e 35, quindi, per la stessa ragione detta poco anzi, dobbiamo dividere il numero maggiore 798 pel minore 35; eseguendo la divisione, ed ottenendosi per resto 28, non sarà dunque 35 il massimo comun divisore de' due numeri proposti, perciò passeremo a dividere 35 per 28; effettuando la divisione, ed ottenendosi per resto 7, neppure 28 sarà il massimo comun divisore de' due numeri proposti; quindi passeremo a dividere 28 per 7, e poichè questa divisione riesce esatta, ne conchiuderemo che 7 è il massimo comun divisore dei due numeri proposti.

Avvertimento. Allorquando il divisore dell' ultima divisio-

ne esatta è l'unità, i numeri proposti non avendo divisor comune più grande dell' unità sono *primi fra loro.*

112. Allorquando si giunge ad una divisione dove si vede a colpo d'occhio che il dividendo e il divisore sono numeri fra primi loro, è inutile proseguire innanzi l'operazione: è fin d'allora può conchiudersi che i due numeri proposti non hanno comun divisore più grande dell' unità, e perciò sono anche *primi fra loro.*

Così, per esempio, se occorresse trovare il massimo comun divisore de' due numeri 853 e 92, dividendo 853 per 92 si ottiene per resto 25; ma poichè si vede a colpo d'occhio che il divisore 92 ed il resto 25 sono primi fra loro, senza proseguir oltre l'operazione, se ne conchiuderà che i due numeri proposti sono anche primi fra loro.

PROPRIETÀ DEL MASSIMO COMUN DIVISORE E DEI NUMERI PRIMI FRA LORO.

113. *Ogni comun divisore a due numeri deve dividere il loro massimo comun divisore.*

In effetti, operando su i due numeri dati come se dovesse trovarsi il loro massimo comun divisore, ogni comun divisore ai detti numeri dovrà dividere tutti i resti delle divisioni (n.° 109); quindi dovrà anche dividere il resto della penultima divisione, che è il divisore dell' ultima divisione, ossia il massimo comun divisore di due numeri proposti.

114. *Il massimo comun divisore di più numeri si compone dal prodotto di tutti i fattori comuni a questi numeri.*

In effetti, il prodotto di tutti i fattori comuni ai numeri dati, dividendo ciascuno di questi numeri, è divisor comune dei medesimi; dippiù esso è anche massimo comun divisore, perchè se il massimo comun divisore avesse un altro fattore diverso da quelli comuni ai numeri dati, non potrà dividere quello di questi numeri che non contiene questo fattore; e perciò non sarebbe divisor comune dei medesimi.

N. B. Allorchè avremo dato idea dei *fattori primi* di un numero, vedremo come il massimo comun divisore di più numeri si compone per mezzo dei loro fattori primi.

115. *Se due numeri si moltiplicano per un terzo, il massimo comun divisore dei due prodotti è uguale a quello dei due numeri moltiplicato per il terzo numero.*

Supponiamo che i due numeri si moltiplichino per 8. Nella seconda ricerca del massimo comun divisore i resti delle divisioni sono eguali a quelli della prima ricerca moltiplicati per 8 (n.° 104); perciò le divisioni si faranno fra numeri 8 volte maggiori di quelli fra quali si facevano nella prima ricerca; dunque dopo lo stesso numero di divisioni si giungerà ad una divisione esatta, e quindi il massimo comun divisore della seconda ricerca sarà eguale a quello della prima moltiplicato per 8.

116. *Se un numero divide il prodotto di due numeri ed è primo con uno di questi, deve dividere l' altro.*

Sia p. e. il numero 15 che divide il prodotto 28×120, ed è primo col fattore 28, esso dividerà l' altro fattore 120. In effetti, 28 e 15 essendo primi fra loro hanno per massimo comun divisore l' unità; e moltiplicandoli per 120, i prodotti 28×120 e 15×120 hanno (n.° 115) per massimo comun divisore 1×120, ossia 120. Ma ogni comun divisore a due numeri deve dividere il massimo comun divisore; perciò 15 che è divisor comune di 15×120 e di 28×120 dovrà dividere il loro massimo comun divisore 120.

117. *I quozienti che si ottengono dividendo due numeri per il loro massimo comun divisore sono primi fra loro.*

Perchè il massimo comun divisore componendosi da tutti i fattori comuni dei due numeri, allorchè questi numeri si dividono per esso, si vengono a sopprimere tutti i fattori comuni dei medesimi, e quindi i quozienti non conterranno alcun fattore comune, e perciò sono primi fra loro.

118. *Se un numero è divisibile per due numeri primi fra loro, sarà divisibile pel prodotto dei medesimi.*

Sia il numero a divisibile separatamente per i due numeri b e c primi fra loro, dico che sarà divisibile pel loro prodotto $b\times c$. Dinotiamo con q il quoziente di a diviso per b; si avrà $a=b\times q$. Or poichè c divide a dividerà pure il prodotto $b\times q$, che è uguale ad a; ma c è primo con b, dunque deve dividere l' altro fattore q (n.° 116); indichiamo con q' il quoziente di q diviso per c; si avrà $q=c\times q'$; perciò nel prodotto $b\times q$ ponendo $c\times q'$ invece di q, verrà $a=b\times c\times q'$: da qui apparisce essere a divisibile pel prodotto $b\times c$.

RICERCA DEL MASSIMO COMUN DIVISORE DI PIU' DI DUE NUMERI.

119. Per trovare il massimo comun divisore fra tre numeri; si cercherà prima il massimo comun divisore fra due di essi, e poi fra il terzo numero ed il massimo comun divisore dei due primi, e questo sarà quello dei tre numeri dati.

Così p. e. volendosi il massimo comun divisore dei tre numeri 36, 54, e 63. Si troverà prima quello di 36 e 54, che è 18; poi troveremo quello di 18 e di 63 che è 9: dunque 9 sarà il massimo comun divisore dei tre numeri dati.

Difatti, il massimo comun divisore dei tre numeri dovendo dividere i due primi, deve dividere il loro massimo comun divisore; ma deve dividere anche il terzo numero; dunque deve dividere il massimo comun divisore dei due primi ed il terzo numero; perciò esso sarà il massimo comun divisore del terzo numero e del massimo comun divisore dei due primi.

Se si cercasse il massimo comun divisore di quattro numeri, si troverebbe prima quello di tre di essi, e poi quello del quarto numero e del massimo comun divisore dei primi tre, e questo sarà quello dei quattro numeri dati. Similmente si troverebbe il massimo comun divisore fra più di quattro numeri.

MINIMO MULTIPLO DI PIU' NUMERI.

120. Un numero si dice *multiplo comune* o *dividendo comune* di più numeri quando è divisibile esattamente per tutti questi numeri.

Il più picciolo fra i multipli comuni a più numeri si dice *minimo multiplo comune* di questi numeri, o *minimo comun dividendo* dei medesimi.

Così p. e. il minimo multiplo di 4, 6, e 15, è 60; perchè è il più picciolo numero che possa dividersi esattamente per 4, 6, e 15.

RICERCA DEL MINIMO MULTIPLO COMUNE DI PIU' NUMERI.

121. *Il minimo multiplo di due numeri si ottiene dividendo il prodotto di questi numeri per il loro massimo comun divisore.*

Così p. e. se vogliasi il minimo multiplo di 36 e 54; si troverà prima il loro massimo comun divisore che è 18; poi il prodotto di 36 per 54 si dividerà per 18, e si avrà il minimo multiplo di 36 e 54 che sarà $\frac{36\times54}{18}=2\times54=108$.

Dim. Indichiamo con a e b i due numeri dati, e con d il loro mas-

simo comun divisore; e sieno q e q' i quozienti che si ottengono dividendo i numeri dati per d.

Siccome il dividendo è uguale al divisore moltiplicato per il quoziente, si avrà $a=d\times q$, e $b=d\times q'$; e moltiplicando a per b, e dividendo il prodotto $d\times q\times d\times q'$ per d, si avrà per quoziente $q\times d\times q'$. Or poichè i fattori di q sono diversi da quelli di q' (n.° 117), è manifesto che ogni multiplo di a e b deve contenere tutti i fattori che sono nel prodotto $q\times d\times q'$, perchè deve contenere i fattori che sono in q e d, affinchè esso sia divisibile per $d\times q$ ossia per a, ed anche quelli di q' affinchè fosse divisibile per $d\times q'$ ossia per b; dunque anche il minimo multiplo di a e b, dovendo contenere tutti i fattori che sono nel prodotto $q\times d\times q'$, non può esser minore di questo prodotto; perciò questo stesso prodotto è il minimo multiplo di a e b.

122. *Ogni multiplo comune di due numeri sarà multiplo del loro minimo multiplo.*

Perchè abbiamo veduto che ogni multiplo comune di due numeri contiene tutti i fattori che sono nel minimo multiplo.

123. Per trovare il minimo multiplo comune di tre numeri, si cercherà prima il minimo multiplo di due di essi, e poi quello del terzo numero e del minimo multiplo dei due primi, e questo sarà quello dei tre numeri dati.

Così p. e. volendosi il minimo multiplo dei tre numeri 8, 10, e 12; cercheremo prima quello di 8 e 10, che è 40; poi cercheremo quello di 40 e 12 che è 120, e questo sarà il minimo multiplo dei tre numeri dati.

In effetti, sarà multiplo comune, perchè è multiplo del terzo numero ed è multiplo di un multiplo degli altri due. È poi minimo, perchè il minimo multiplo dei tre numeri non può esser minore del minimo multiplo dei due primi, perciò, o sarà eguale al minimo multiplo dei due primi, o sarà un multiplo di questo minimo multiplo; ma deve esser multiplo del terzo numero, dunque il minimo multiplo dei tre numeri è multiplo del terzo numero, e del minimo multiplo dei due primi; perciò esso sarà il minimo multiplo del terzo numero e del minimo multiplo dei due primi.

Se si volesse il minimo multiplo comune di quattro numeri, si troverebbe prima quello di tre di essi, e poi quello del quarto numero e del minimo multiplo dei tre primi, e questo sarà quello dei quattro numeri dati.

Dopo ciò è facile capire come dovrebbe farsi se i numeri dati fossero più di quattro.

NUMERI PRIMI.

124. Si chiama *numero primo* ogni numero intero che non è divisibile se non che per sè stesso e per l' unità.

Tali sono p. e. i numeri 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ec.

Fra i numeri pari il solo 2 è numero primo, perchè tutti gli altri sono divisibili per 2. Dunque i numeri primi sono tutti impari, eccetto 2; ed essi non possono essere terminati che dalle cifre 1, 3, 7, 9, perchè quelli terminati da 5 sono divisibili per 5.

125. È facile formare una *tavola* di numeri primi, che si estenda sino ad un certo numero, p. e. sino a 1000, vale dire che comprenda tutti i numeri primi che non superano 1000. Per formarla si scriveranno in un quadro disposti con ordine di grandezza tutti i numeri interi sino a 1000; poi si cancellano da esso tutti quelli divisibili per 2, cioè tutti i numeri pari eccetto 2 che è primo. Indi si cancellano tutti quelli divisibili per 3, eccetto 3 che è primo, e questi sono di tre in tre posti dopo 3; poi si cancellano tutti quelli divisibili per 5, eccetto 5 che è primo, e questi sono di 5 in 5 posti dopo 5. Similmente si pratica rispetto a quelli divisibili per i numeri primi 7, 11, 13, 17, ec.; e gli altri che rimangono non cancellati, non essendo divisibili per alcun numero, saranno i numeri primi sino a 1000.

Avvertiamo che quante volte si comincia a contare, deve contarsi dal numero non cancellato che vien dopo quello da cui si è contato immediatamente prima. Così, dopo che si è contato di 13 in 13, si passa avanti dopo 13, e si trova 17 che non è cancellato, ciò è segno che 17 è numero primo, e quindi si dovrà contare di 17 in 17 posti dopo 17. È chiaro poi che 17 è numero primo, altrimenti sarebbe divisibile per un numero primo minore di 17, il che non può avvenire; perchè i numeri divisibili per quelli minori di 17 si sono già cancellati prima.

Nell' eseguire l' operazione accade molto spesso che taluni numeri si trovano già cancellati, ma ciò non reca alcun pregiudizio. Così p. e. quando si conta di 5 in 5, si trovano già cancellati 10, 20, 30 40, ec. 15, 45, ec., i quali eransi cancellati allorchè si è contato di 2 in 2, e di 3 in 3 (*).

L' operazione dovrà arrestarsi allorchè si giunge a contare

(*) Immaginando praticati dei fori sulla tavola nei luoghi dove sono i numeri cancellati, e facendo cadere questi numeri per dentro i fori; restano sulla tavola i soli numeri primi; essa allora prende l' aspetto di un crivello, che dicesi *crivello di Eratostene*, perchè egli lo immaginò.

da un numero non cancellato maggiore della radice quadrata di 1000 (la quale è compresa fra 31 e 32 come vedremo in seguito); perchè, se si volesse proseguire, verrebbero a cancellarsi i numeri divisibili per quelli che sono maggiori di detta radice quadrata, e quindi sono divisibili anche per i quozienti che devono essere minori della detta radice, ma i numeri divisibili per quelli minori di detta radice si trovano già cancellati prima; perciò è inutile contare dai numeri maggiori della cennata radice.

I quozienti sono minori della radice quadrata, perchè se un numero si divide per la sua radice quadrata, il quoziente sarà la stessa radice; ma se si divide per un numero maggiore della radice quadrata, il quoziente sarà minore di essa radice, perchè crescendo il divisore, diminuisce il quoziente.

Ecco qui appresso una tavola di tutti i numeri primi che hanno due cifre e tre cifre, e vi è il più picciolo di quattro cifre. Vi sono per altro tavole che si estendono sino a 100000, come è quella nell' Algebra del *P. Inghirami*, e sino ad 8036000, come è quella di *Burckhardt*.

11	71	149	229	313	409	499	601	691	809	907
13	73	151	233	317	419	503	607	701	811	911
17	79	157	239	331	421	509	613	709	821	919
19	83	163	241	337	431	521	617	719	823	929
23	89	167	251	347	433	523	6 9	727	827	937
29	97	173	257	349	439	541	631	733	829	941
31	101	179	263	353	443	547	641	739	839	947
37	103	181	269	359	449	557	643	743	853	953
41	107	191	271	367	457	563	647	751	857	967
43	109	193	277	373	461	569	653	757	859	971
47	113	197	281	379	463	571	659	761	863	977
53	127	199	283	383	467	577	661	769	877	983
59	131	211	293	389	479	587	673	773	881	991
61	137	223	307	397	487	593	677	787	883	997
67	139	227	311	401	491	599	683	797	887	1009

FATTORI PRIMI DI UN NUMERO. — PROPRIETA' DE' NUMERI PRIMI.

126. Un numero se non è primo sarà almeno il prodotto di due fattori; e se questi fattori nè anche sono numeri primi, ciascuno sarà il prodotto di altri fattori; e così seguitando a decomporre i fattori non primi in nuovi fattori, dovrà

finalmente giungersi a fattori tali che non sono decomponibili in altri fattori: questi ultimi fattori diconsi *fattori primi* o *semplici* ed anche *divisori primi* del numero proposto.

127. *Se un numero primo divide il prodotto di più fattori deve dividere uno di questi fattori.*

Supponiamo che il prodotto sia formato dai fattori a, b, c, d, e che il dato numero primo non divide il fattore a. Possiamo riguardare il prodotto come formato da due fattori, uno dei quali sia a, e l' altro sia il prodotto $b\times c\times d$ dei rimanenti fattori, che per metterlo in evidenza lo chiudiamo in parentesi, scrivendo il prodotto così, $a\times(b\times c\times d)$. Or poichè il dato numero primo divide questo prodotto ed è primo col fattore a, deve dividere il prodotto $b\times c\times d$ dei rimanenti fattori. Per la stessa ragione dividendo il prodotto $b\times c\times d$, se non divide il fattore b deve dividere il prodotto $c\times d$ dei rimanenti fattori; e così seguitando, se non divide c, dividerà l' altro fattore d; perciò dividerà necessariamente uno dei fattori del prodotto proposto.

128. *Un numero primo che divide la potenza di un numero, dividerà questo numero.*

Perchè la potenza di un numero non è altro che un prodotto di fattori eguali a questo numero; ed un numero primo che divide il prodotto, sappiamo che divide uno dei fattori.

129. *Un numero non è decomponibile che in un sol sistema di fattori primi.*

Supponiamo che un numero sia decomponibile in due sistemi di fattori primi; e sieno a, b, c, d i fattori del primo sistema, e p, q, r, s, t i fattori del secondo. Siccome tanto il prodotto dei primi fattori quanto il prodotto dei secondi fattori è uguale al numero proposto, questi due prodotti saranno eguali fra loro, e si avrà $a\times b\times c\times d = p\times q\times r\times s\times t$; ed in questa eguaglianza possiamo supporre che nessun fattore sia comune al primo ed al secondo membro, perchè se vi fossero fattori comuni si potrebbero dividere per essi i due membri, e così restano formati da fattori primi diversi. Ciò posto, un fattore qualunque del secondo membro dovendo anche dividere il primo membro che è uguale al secondo, dovrà dividere (n.° 127) uno dei fattori del primo membro; ma ciò è assurdo, perchè i fattori del primo membro sono tutti numeri primi diversi da quelli del secondo membro.

130. *La serie dei numeri primi è illimitata.*

Vogliamo provare che per quanto grande possa essere un numero primo, che denotiamo con P, vi sarà sempre un altro maggiore di P. In effetti, il prodotto $1\times2\times3\times5\times7\times11\ldots\times P$ di tutti i numeri primi sino a P è divisibile per tutti questi numeri; ma se vi aggiungiamo l'unità, la somma risultante, che è $1\times2\times3\times5\times7\times\ldots P+1$, divisa per tutti i numeri primi sino a P dà per resto 1. Ora questa somma, la quale è maggiore di P, o essa è un numero primo, o no; se essa è un numero primo, resta già dimostrato di esservi un numero primo maggiore di P; se essa non è numero primo, dovrà avere un divisore primo; ma nessun divisore primo sino a P la divide esattamente; dunque il suo divisore primo sarà maggiore di P; perciò in ogni caso vi sarà un numero primo maggiore di P.

DECOMPOSIZIONE DI UN NUMERO IN FATTORI PRIMI.

131. Si comincia dal dividere il numero proposto pel numero primo **2**, se esso è divisibile per **2**, ed il quoziente, se si può, si dividerà di nuovo per **2**, e si continueranno a dividere i successivi quozienti per **2**, finchè si giungerà ad un quoziente che non più è divisibile per **2**. Giunti a questo quoziente esso si dividerà per **3** che è il numero primo appresso a **2**, e se la divisione riesce esatta il quoziente che si otterrà si dividerà di nuovo per **3**, e si seguiterà la divisione dei successivi quozienti per **3**, fino a che si giungerà ad un quoziente che non sia più divisibile per **3**; allora si passerà a dividere questo quoziente per **5**, che è il numero primo dopo **3**, facendosi rispetto a **5** quello stesso che si è fatto rispetto a' divisori **2** e **3**; e similmente si proseguirà a dividere i quozienti esatti successivi per i numeri **7**, **11**, **13**, ec. fino a che si perviene ad un quoziente che diviso pel numero primo a cui si è giunto, produca un quoziente minore del divisore; allora si cessa la divisione, ed il numero proposto sarà eguale al prodotto dell'ultimo quoziente esatto che si è ottenuto, e di tutti i numeri primi che sono stati divisori esatti delle successive divisioni che si sono eseguite.

Sia p. e. il numero 51376941 che voglia decomporsi in fattori primi. Primieramente si osserva che il proposto numero non è divisibile per 2, perciò passiamo a dividerlo per 3, disponendo l'operazione come qui affianco; e perchè la divisione può eseguirsi, l'eseguiremo ed otterremo per quoziente 17125647;

51376941	3
17125647	3
5708549	7
815507	7
116501	7
16643	11
1513	17
89	89

poi si continua a dividere questo quoziente per 3, e si avrà l'altro quoziente 5708549; e siccome questo quoziente non può dividersi per 3 si passa a dividerlo per 5, ma perchè non è divisibile per 5 si passa a dividerlo per 7, e si avrà per quoziente 815507, il quale si divide di nuovo per 7, e si avrà per quoziente 116501, che si divide ancora per 7, e si avrà per quoziente 16643; questo quoziente non essendo più divisibile per 7 passeremo a dividerlo per 11 che è il numero primo dopo 7, e si troverà per quoziente 1513; il quale non potendosi dividere più per 11, si dividerà per 13 numero primo dopo 11, ma non potendosi dividere per 13, si dividerà per 17 numero primo dopo 13, e si avrà per quoziente 89; poi si continuerà a dividere 89 per 17, e poichè la divisione non viene esatta, ed il quoziente che si ottiene è minore del divisore 17, se ne conchiuderà che 89 è numero primo, ed è l'ultimo ed il massimo fattore primo del numero proposto. Per uniformità l'abbiamo scritto sotto gli altri fattori primi.

La ragione per cui l'ultimo quoziente esatto 89 è numero primo si è perchè esso non può dividersi per numeri primi minori dell'ultimo divisore esatto 17, per essersi già esaurite le divisioni per questi numeri primi; e nè anche può dividersi per numeri primi maggiori, perchè il quoziente essendo per ipotesi minore di 17 sarebbe divisibile esattamente per questo quoziente, e per i fattori primi del medesimo che sono minori di 17, il che abbiamo detto di non poter succedere.

Dunque i fattori primi in cui si risolve il numero proposto sono 3, 3, 7, 7, 7, 11, 17, 89.

Difatti, si vede che il numero proposto è uguale al primo divisore 3 che gli sta affianco, moltiplicato pel primo quoziente 17125647, cioè, 51376941=3.17125647; per la stessa ragione, il primo quoziente è uguale al secondo divisore 3 che gli sta affianco moltiplicato pel secondo quoziente che gli sta sotto, cioè, 17125647=3.5708549; similmente seguitando, si

scorge che il numero proposto è uguale al prodotto de' divisori primi che trovansi scritti a dritta della linea, poichè si ha $51376941 = 3.17125647 = 3.3.5708549 = 3.3.7.815507 = 3.3.7.7.116501 = 3.3.7.7.7.16643 = 3.3.7.7.7.11.1513 = 3.3.7.7.7.11.17.89 = 3^2.7^3.11.17.89$.

Avvertimento — Allorchè si giunge ad un divisore su cui nasce dubbio se sia o no primo, e non si ha una tavola di numeri primi per assicurarsene, ciò nulla importa; perchè se esso non è primo, la divisione non potrà eseguirsi, altrimenti potrebbe eseguirsi anche per i numeri primi fattori del medesimo, e queste divisioni si sono già esaurite; se poi è primo e la divisione per il medesimo riesce esatta, esso sarà un fattore primo del numero proposto; se non riesce esatta si passerà avanti a dividere per i numeri dispari maggiori non terminati da 5, e non decomponibili in fattori che si veggono a colpo d'occhio, onde evitare una divisione inutile per tali numeri dispari.

132. Allorchè si vede a colpo d'occhio che un numero è decomponibile in fattori non primi, conviene dividerlo successivamente per ciascuno di questi fattori per avere un risparmio di divisioni.

Così p. e. il numero 38253600 volendosi decomporre in fattori primi, osserviamo che esso è divisibile per 100, ossia per $2^2.5^2$; si dividerà dunque per 100, come si vede qui affianco, e si avrà per quoziente 382536. Poi osserviamo che 382536 è divisibile per 8, ossia per 2^3;

38253600	$100 = 2^2.5^2$
382536	$8 = 2^3$
47817	$9 = 3^2$
5313	3
1771	7
253	11
23	23

si dividerà per 8, e si avrà per quoziente 47817. Dopo vediamo che 47817 è divisibile per 9, ossia per 3^2; si dividerà per 9, e si avrà per quoziente 5313. Indi vediamo che 5313 non è più divisibile per 9, ma lo è per 3; si dividerà per 3, e darà per quoziente 1771. Poi si passa a dividere 1771 per 7, e si avrà per quoziente 253 che non trovandosi più divisibile per 7 si dividerà per 11, e si avrà per quoziente il numero primo 23. Perciò il proposto numero è uguale al prodotto $2^2.5^2.2^3.3^2.3.7.11.23 = 2^5.3^3.5^2.7.11.23$.

133. Mediante una tavola di numeri primi, accompagnata dai più piccioli divisori dei numeri impari non primi, si può agevolare la decomposizione di un numero in fattori primi. Sia p. e. il numero impari 419727 che voglia decomporsi in fattori primi. Si cerchi nella tavola se esso è primo, e si trova che non è primo, perchè si trova che tiene per più piccolo divi-

sore 3, perciò si dividerà per 3 e si cercherà nella tavola se il quoziente 139909 è primo, e si trova che non è primo, ma ha per più picciolo divisore 7; si dividerà 139909 per 7 e si ha per quoziente 19987, che si cercherà nella tavola se è primo, e si trova che ha per più picciolo divisore 23; si dividerà per 23 e si ha per quozlente 79 che si cercherà nella tavola se è primo, e siccome si trova esser primo, se ne conchiuderà che il numero proposto è uguale al prodotto dei fattori primi 3.7.9.23.79.

134. Per conoscere se un numero sia primo, allorchè non si ha una tavola di numeri primi, si adopera lo stesso procedimento come se si volesse decomporre questo numero in fattori primi, perchè se non si trova decomponibile in fattori sarà primo.

RICERCA DEL MASSIMO COMUN DIVISORE E DEL MINIMO MULTIPLO DI PIU' NUMERI PER MEZZO DEI LORO FATTORI PRIMI.

135. *Il massimo comun divisore di più numeri si forma dal prodotto dei i fattori primi comuni ai medesimi, presi col minimo esponente.*

Così p. e. se si volesse il massimo comun divisore dei numeri 144, 504, 3000; decomponendoli in fattori primi si avrà $144=2^4.3^2$, $504=2^3.3^2.7$, $3000=2^3.3.5^3$. Ed osservando che i fattori primi comuni sono 2 e 3, il prodotto dei fattori primi comuni presi col minimo esponente sarà $2^3.3=24$: perciò questo prodotto sarà il massimo comun divisore dei tre numeri dati.

Dim. È comun divisore perchè i fattori che esso contiene sono contenuti in ognuno dei numeri dati.

È poi massimo, perchè il massimo comun divisore, non può avere un fattore diverso da quelli comuni ai numeri dati, altrimenti non dividerebbe quello dei numeri dati che non ha questo fattore; nè può avere un fattore con un esponente maggiore, altrimenti non dividerebbe quello dei numeri dati dove questo fattore ha un esponente minore.

136. *Il minimo multiplo comune di più numeri si forma dal prodotto dei fattori primi comuni e non comuni di questi numeri, presi col massimo esponente.*

Sieno p. e. i numeri 144, 504, 3000 di cui vogliasi il mini-

mo multiplo. Scomponendoli in fattori primi si ha $144=2^4.3^2$, $504=2^3.3^2.7$, $3000=2^3.3.5^3$; quindi i fattori primi di questi numeri sono 2, 3, 7, 5, ed il prodotto dei medesimi presi col massimo esponente sarà $2^4.3^2.5^3.7=126000$: perciò questo prodotto sarà il minimo multiplo dei numeri proposti.

Dim. In effetti, questo prodotto è divisibile per tutti i numeri dati, perchè contiene tutti i fattori primi che sono in ognuno dei numeri dati, e li contiene con un esponente maggiore o almeno eguale a quello che hanno nei numeri dati. È poi minimo multiplo, perchè da esso non si può sopprimere alcun fattore, altrimenti non sarebbe più divisibile per quello dei numeri dati dove questo fattore ha un esponente maggiore.

RICERCA DI TUTTI I DIVISORI DI UN NUMERO.

137. *Si trovino tutti i fattori primi del numero proposto, e si scrivano ciascuno in una colonna verticale con i diversi esponenti che esso tiene, cominciando dall' unità sino al massimo, e si ponga in testa di ciascuna colonna l' unità; poi si moltiplichino i fattori della seconda colonna per quelli della prima includendovi l' unità, i diversi prodotti che si ottengono saranno tutti i divisori del numero proposto, se esso ha due soli fattori primi; ma se ne ha tre, si moltiplichino i prodotti ottenuti dalle due prime colonne per i fattori della terza colonna, ed i nuovi prodotti saranno tutti i divisori primi del numero proposto. Similmente si pratichi se i fattori primi fossero più di tre.*

Supponiamo che vogliansi trovare tutti i divisori del numero 245000. I suoi fattori primi sono 2^3, 5^4, 7^2, perciò si ha $245000=2^3.5^4.7^2$.

Scriviamo i fattori primi 2, 5, 7, con tutti gli esponenti che essi hanno cominciando dall' esponente 1, ed in testa di ciascuna colonna scriviamo anche l' unità.

1	1	1	$1=1$
2	5	7	$2=2$
2^2	5^2	7^2	$2^2=4$
2^3	5^3		$2^3=8$
	5^4		$5=5$
			$2.5=10$
			$2^2.5=20$
			$2^3.5=40$
			$5^2=25$
			$2.5^2=50$

È chiaro che queste tre colonne, se escludiamo da esse l' unità, conterranno tutti i di-

$2^2.5^2 = 100$
$2^3.5^2 = 200$
$5^3 = 125$
$2.5^3 = 250$
$2^2.5^3 = 500$
$2^3.5^3 = 1000$
$5^4 = 625$
$2.5^4 = 1250$
$2^2.5^4 = 2500$
$2^3.5^4 = 5000$

visori primi del numero proposto elevati a potenze, cominciando dalla prima sino alla massima che essi hanno. Per trovare poi tutti i divisori possibili del numero proposto moltiplicheremo tutti i divisori della prima colonna per ciascuno della seconda successivamente, e così otterremo una serie di divisori che scriveremo in una nuova colonna affianco alle prime. Questa nuova colonna conterrà tutti i divisori compresi nella prima, inclusa l' unità, perchè risultano dal moltiplicare i divisori della prima per l' unità della seconda colonna; dippiù conterrà tutti i divisori compresi nella seconda colonna, eccetto l' unità, perchè risultano dal moltiplicare i divisori della seconda colonna per l' unità della prima; inoltre conterrà i divisori che si formano moltiplicando i divisori della prima colonna, eccetto l' unità, per i divisori della seconda, eccetto l' unità; quindi se le colonne fossero due sole, la nuova colonna conterrà tutti i divisori possibili del numero proposto, perchè tiene tutte le combinazioni possibili dei divisori della prima colonna con quelli della seconda. Per tal modo, continuando a supporre che le colonne fossero due sole, se indichiamo con a il numero dei divisori compresi nella prima, inclusa l' unità, e con b il numero dei divisori contenuti nella seconda, inclusa l' unità, il prodotto di queste due colonne conterrà un numero di divisori indicato da $a \times b$; e perciò il numero proposto conterrà $a \times b$ divisori.

Se poi le colonne sono tre, come è nel nostro caso, si moltiplicheranno tutti i divisori contenuti nella nuova colonna che si è ottenuta, e che sarebbe la quarta, per quelli contenuti nella terza inclusa l' unità, e si avrà una quinta colonna che tiene tutti i divisori possibili del numero proposto; perchè moltiplicando la quarta per l' unità della terza si avranno tutti i numeri della quarta colonna, i quali non sono che i divisori contenuti nella prima e nella seconda colonna, e quelli che si formano combinando ciascun divisore contenuto nella prima con ciascuno contenuto nella seconda; e continuando poi a moltiplicare la quarta colonna per i rimanenti divisori della terza, si avranno le combinazioni dei divisori della seconda con quelli della terza, più le combina-

zioni formate dai gruppi di tre divisori, cioè di ciascun divisore della prima con ciascuno della seconda e della terza; perciò non mancherà alcuno dei divisori del numero proposto. Adunque se indichiamo con c il numero dei divisori della terza colonna, inclusa l'unità, il numero dei divisori del numero proposto sarà $a \times b \times c$.

Si può osservare che fra i divisori del numero proposto trovati nel predetto modo è compresa l'unità ed il numero stesso; risultando l'unità dal moltiplicare fra loro le unità delle diverse colonne, ed il numero proposto dal combinare fra loro gli ultimi divisori delle medesime colonne, i quali nel nostro esempio sono 2^3, 5^4, 7^2, ed il loro prodotto è $2^3.5^4.7^2$, ossia il numero proposto.

In questo esempio i divisori della prima colonna essendo indicati da $3+1$, cioè dal massimo esponente del fattore primo 2 aumentato dell'unità, e quelli della seconda colonna da $4+1$, cioè dal massimo esponente del fattore primo 5 aumentato della unità, e quelli della terza da $2+1$, cioè dal massimo esponente del fattore primo 7 aumentato di una unità; ne segue che il numero dei divisori del numero proposto sarà $(3+1)(4+1)(2+1) = 4 \times 5 \times 3 = 60$.

Effettuando nel modo indicato le moltiplicazioni dei divisori scritti nella quarta colonna per quelli della terza si ottengono tutti i 60 divisori del numero proposto, che sono i seguenti 1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40, 25, 50, 100, 200, 125, 250, 500, 1000, 625, 1250, 2500, 5000, 7, 14, 28, 56, 35, 76, 140, 280, 175, 350, 700, 1400, 875, 1750, 3500, 7000, 4375, 8750, 17500, 35000, 49, 98, 196, 392, 245, 490, 980, 1960, 1225, 2450, 4900, 9800, 6125, 12250, 24500, 49000, 30625, 61250, 122500, 245000.

CAP. IV.

FRAZIONI.

DEFINIZIONI E PROPRIETÀ DELLE FRAZIONI.

138. Spesso occorre dividere l'unità in parti eguali, e prendere un certo numero di queste parti. Ciò premesso:

Un numero che esprime in quante parti eguali è divisa l'unità e quante di queste parti si prendono, si chiama *fratto*, *frazione*, ovvero *rotto*.

Dunque per rappresentare una frazione si richieggono due numeri, uno che indica in quante parti eguali si suppone divisa l'unità, e si chiama *denominatore*, l'altro che dinota quante di queste parti si prendono, e si chiama *numeratore*.

Così, se l'unità è divisa in 7 parti eguali e se ne prendono 5, il denominatore è 7 che dà il nome alle parti eguali le quali diconsi *settimi*, e 5 è il numeratore che numera di doversene prendere 5.

Il numeratore ed il denominatore hanno il nome comune di *termini* della frazione.

Una frazione si enuncia, proferendo prima il numeratore e poi il denominatore; così la frazione che ha per denominatore 7 e per numeratore 5, si enuncia dicendo *cinque settimi*. Essa poi si scrive mettendo il numeratore sopra il denominatore, ponendo fra l'uno e l'altro una lineetta così, $\frac{5}{7}$.

Dunque se troviamo scritte le frazioni $\frac{8}{9}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{17}$, i loro rispettivi numeratori sono 8, 3, 2, 4, ed i denominatori sono 9, 10, 13, 17; perciò esse si leggeranno: *otto noni, tre decimi, due tredicesimi, quattro diciassettesimi*.

Le frazioni si distinguono in *vere* e *spurie* (*): si dice *vera*

(*) La vera suole chiamarsi frazione *propria*, e la spuria *impropria*. Chiameremo *espressione frazionaria* quella che non ha per nu-

quella minore dell' unità, è *spuria* quella uguale o maggiore dell' unità.

Una frazione è minore dell' unità quando il numeratore è minore del denominatore, perchè in essa si prende un numero di parti minore di quello in cui si è divisa l' unità.

Una frazione è maggiore dell' unità quando il numeratore è maggiore del denominatore, perchè in essa si prende un numero di parti maggiore di quello in cui si è divisa l' unità.

Qualunque frazione che ha il numeratore uguale al denominatore è uguale all' unità. Così le frazioni $\frac{3}{3}$, $\frac{16}{16}$, $\frac{120}{120}$, sono eguali all' unità, perchè nella prima l' unità è divisa in tre parti eguali, e se ne prendono anche tre, perciò si ritorna ad avere l' unità. Lo stesso si dica delle altre.

139. Passiamo ora ad esaminare i CAMBIAMENTI che avvengono in una frazione, cambiando i suoi termini.

Se si aumenta o si diminuisce il numeratore di una frazione, senza alterare il denominatore, la frazione nel primo caso aumenta, e nel secondo diminuisce.

Perchè quando si aumenta il solo numeratore, si prendono più parti dell' unità, le quali hanno lo stesso valore, per esser rimasto lo stesso il denominatore; quindi la frazione aumenta.

Similmente si vede che quando diminuisce il solo numeratore, la frazione diminuisce.

140. *Se si aumenta o si diminuisce il denominatore di una frazione, senza alterare il numeratore, la frazione nel primo caso diminuisce, e nel secondo cresce.*

Perchè quando si aumenta il solo denominatore si viene a prendere lo stesso numero di parti dell' unità, ma esse han-

---

meratore e denominatore due numeri interi, ma uno di essi, o ambedue sono numeri frazionarii. Tali sono l' espressioni frazionarie

$$\frac{2+\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}+5}, \quad \frac{\frac{1}{5}}{9}, \quad \frac{7}{15\times\frac{3}{8}};$$

dove la *linea principale* di frazione è quella sotto a $2+\frac{1}{3}$ nella prima, e sotto ad $\frac{1}{5}$ nella seconda, e sotto a 7 nella terza.

no un valore minore, per essersi divisa l'unità in un numero maggiore di parti; e perciò la frazione diminuisce.

Similmente si vede che quando diminuisce il solo denominatore, la frazione cresce.

141. *Se ai due termini di una frazione si aggiunge o si toglie lo stesso numero, la frazione nel primo caso si avvicina all' unità, e nel secondo se ne allontana.*

In effetti, quando si aggiunge ai due termini della frazione lo stesso numero, la differenza fra essi non cambia (n.° 40); ma siccome questa differenza esprime di quante parti la frazione differisce dall'unità, ne segue che la frazione differisce dall'unità dello stesso numero di parti che prima ne differiva, ma queste parti essendo più picciole perchè il denominatore è più grande, la frazione differisce meno dall'unità; e perciò aumenta se è vera, e diminuisce se è spuria.

Similmente ragionando si vede che togliendo dai due termini lo stesso numero, la frazione si allontana dall'unità.

142. *Se il numeratore di una frazione si moltiplica o si divide per un numero, senza alterare il denominatore, la frazione nel primo caso si moltiplicherà, e nel secondo si dividerà per lo stesso numero.*

Sia la frazione $\frac{8}{11}$ il cui numeratore si moltiplichi per 5, ne verrà la frazione $\frac{40}{11}$ che è 5 volte maggiore della prima.

Difatti, nella prima frazione l'unità è divisa in 11 parti eguali e se ne prendono 8; nella seconda essa pure è divisa in 11 parti eguali, perciò le parti hanno lo stesso valore; ma siccome se ne prende un numero 5 volte maggiore, la frazione che ne risulta sarà 5 volte maggiore della prima.

Similmente si dimostra che se il numeratore di una frazione si divide per un numero, senza alterare il denominatore, la frazione si dividerà pel medesimo numero.

143. *Se il denominatore di una frazione si moltiplica, o si divide per un numero, senza alterare il numeratore, la frazione nel primo caso si divide, e nel secondo si moltiplica pel medesimo numero.*

Sia la frazione $\frac{7}{9}$ il cui denominatore si moltiplichi per 4, ne verrà la frazione $\frac{7}{36}$ che è 4 volte minore della prima.

In effetti, nella prima frazione l'unità è divisa in 9 parti

eguali e se ne prendono 7; ma nella seconda frazione l' unità è divisa in un numero di parti 4 volte maggiore, perciò ciascuna di esse avrà un valore 4 volte minore di ciascuna delle prime (*); e siccome si prende lo stesso numero di parti, la frazione che ne risulta sarà 4 volte minore della prima.

Similmente si dimostra che se si divide il denominatore di una frazione per un numero, la frazione si moltiplicherà per quel numero.

144. ***Una frazione non cambia valore se si moltiplicano, o si dividono i suoi due termini per lo stesso numero.***

Perchè moltiplicando il numeratore, la frazione si moltiplica, e moltiplicando poi il denominatore, la frazione si divide pel medesimo numero; quindi un' operazione distrugge l' altra, e perciò la frazione non cambia valore.

Similmente si dimostra che se si dividono i due termini di una frazione per lo stesso numero, la frazione non si altera.

145. ***Ogni frazione equivale al quoziente che si ottiene dividendo il numeratore per il denominatore*** (**).

Sia la frazione $\frac{4}{9}$; dico che essa è uguale a 4 diviso per 9, ossia alla ***nona*** parte di 4.

In effetti, essendo $4=1+1+1+1$, dividendo il primo ed secondo membro per 9, verrà $4:9=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}$;

vale a dire che 4 diviso per 9 è uguale ad ***un nono*** ripetuto 4 volte che fa ***quattro noni***; perciò una frazione equivale al

(*) Snole riguardarsi come evidente che, se una grandezza è divisa in un certo nnmero di parti eguali, e poi si divide in un numero di parti 2, 3, ec. volte maggiore, ciascnna delle nuove parti sarà 2, 3, ec. volte minore di ciascuna delle prime; ma per chi rigorosamente volesse dimostrata la cosa, ecco come si dimostra.

Sia p. e. una grandezza divisa in 5 parti eguali, e poi voglia dividersi in un numero di parti 3 volte maggiore; è manifesto che ciò si ottiene dividendo ciascuna delle 5 parti in 3 parti egnali; perchè la grandezza resterà divisa in nn numero di parti indicato da 5×3, cioè in nn nnmero di parti eguali 3 volte maggiore. Intanto ciascnna delle nuove parti sarà 3 volte minore di ciascuna delle prime, perchè le nuove parti si sono ottenute dividendo ciascuna delle prime per 3.

(**) Questa proposizione fu dimostrata nel n.° 73, ma per la sua importanza, ne abbiamo qni ripetuta la dimostrazione.

quoziente che si ottiene dividendo il numeratore per il denominatore.

Corol. *Se una frazione si moltiplica pel denominatore, il prodotto sarà il numeratore.*

Così p. e. la frazione $\frac{5}{8}$ moltiplicata per 8, dà per prodotto il numeratore 5; perchè essa essendo eguale a 5 diviso per 8, moltiplicata pel divisore 8 deve dare il dividendo 5.

146. *Se una frazione, che ha i termini primi fra loro, equivale ad un' altra, i termini della seconda sono equimoltiplici di quelli della prima.*

Sia la frazione $\frac{5}{7}$, i cui termini non hanno fattor comune, eguale all' altra $\frac{65}{91}$. Scriviamo l' eguaglianza $\frac{5}{7}=\frac{65}{91}$; moltiplichiamo i due membri pel denominatore del fratto $\frac{65}{91}$, e verrà $\frac{5\times91}{7}=65$; dunque 7 deve dividere esattamente il prodotto 5×91; ma 7 per ipotesi è primo col fattore 5, perciò deve dividere esattamente l' altro fattore 91 (n.° 104); e se chiamiamo q il quoziente, si avrà $91=7\times q$, che sostituito nell' eguaglianza precedente, questa diverrà $\frac{5\times7\times q}{7}=65$, la quale si riduce a $5\times q=65$, perchè il prodotto $5\times7\times q$ diviso pel fattore 7 dà per quoziente $5\times q$. Dunque 65 è uguale a 5 preso q volte, e 91 è uguale a 7 preso q volte, perciò i due termini della frazione $\frac{65}{91}$ sono equimoltiplici dei due della frazione $\frac{5}{7}$.

RIDUZIONI DELLE FRAZIONI.

147. Vanno comprese sotto il titolo di *riduzione delle frazioni* tutte quelle operazioni che si fanno per convertire le frazioni in altre equivalenti, ma espresse con diversi termini; ovvero si fanno per trasformare un intero in numero frazionario, o un intero ed un fratto in un sol numero frazionario, e viceversa.

Sappiamo che una frazione non cambia valore quando i suoi due termini si dividono per lo stesso numero; ed allora, perchè questi termini divengono più piccoli, si dice che la frazione si *semplifica.*

Se una frazione si semplifica in modo che i suoi due termini divengono i più piccoli possibili, allora dicesi *ridotta alla più semplice espressione*, ovvero *a minimi termini.*

Quando una frazione non è capace di ridursi ad una più semplice espressione, si dice *irriducibile* o *irriduttibile*. Ciò avviene quando i suoi termini non hanno alcun fattor comune, perchè allora qualunque altra frazione equivalente alla prima deve avere i termini equimultiplici di quelli della prima (n.° 146).

RIDUZIONE DI UNA FRAZIONE A MINIMI TERMINI.

148. *Una frazione si riduce a minimi termini, dividendo il numeratore ed il denominatore pel loro massimo comun divisore; i rispettivi quozienti che si ottengono saranno i termini cercati della frazione ridotta alla sua più semplice espressione.*

Sia da ridursi a minimi termini la frazione $\frac{201}{536}$. Cerchiamo primieramente il massimo comun divisore fra i suoi due termini (n.° 111), e troveremo che questo è 67, dividiamo poi i due termini della frazione proposta per 67, ed avremo per rispettivi quozienti 3 ed 8; laonde $\frac{3}{8}$ sarà la proposta frazione ridotta alla sua più semplice espressione, senza che siasi alterata di valore.

Dim. La frazione proposta non cambia valore, perchè i suoi due termini si dividono ambedue per lo stesso numero, che è il loro massimo comun divisore. Inoltre essa si riduce a minimi termini, perchè i termini della frazione dividendosi pel massimo comun divisore il quale si compone da tutti i fattori comuni ai medesimi, i termini della frazione risultante non avranno alcun fattore comune, e perciò la proposta si troverà ridotta a minimi termini (n.° 147).

149. Se fosse data la frazione $\frac{63}{137}$ a ridursi a minimi termini, si trova che essi hanno per massimo comun divisore l'unità, perciò sono primi fra loro; e quindi la proposta frazione è *irriducibile*.

150. Alle volte una frazione può semplificarsi facilmente, perchè si vedono a primo sguardo uno o più de' fattori comuni a' suoi termini. Così p. e. nella frazione $\frac{252}{324}$ scorgen-

dosi che i suoi termini sono ambedue divisibili per 4 e per 9; eseguendo le divisioni essa si semplifica, e si riduce a $\frac{7}{9}$.

ESTRARRE L' INTERO DA UNA FRAZIONE SPURIA.

151. ***Si divide il numeratore pel denominatore, il quoziente sarà l' intero.***

La frazione spuria sarà poi esattamente eguale a questo intero, se la divisione riesce esatta; ma se non viene esatta, sarà uguale all' intero più una nuova frazione che ha per numeratore il resto, e per denominatore lo stesso denominatore.

Sia p. e. la frazione $\frac{28}{7}$ da cui voglia estrarsi l' intero. Dividiamo il numeratore pel denominatore, e si avrà per quoziente esatto 4; dunque la proposta frazione sarà esattamente eguale a 4.

Sia ora la frazione $\frac{51}{8}$ da cui voglia ricavarsi l' intero. Si divida il numeratore pel denominatore, e si avrà per quoziente 6, e per resto 3; perciò la frazione $\frac{51}{8}$ sarà eguale a $6 + \frac{3}{8}$.

Dim. La ragione è chiara, perchè ogni frazione equivale al quoziente che si ottiene dividendo il numeratore pel denominatore (n.° 145).

RIDUZIONE DI UN INTERO IN NUMERO FRAZIONARIO CHE ABBIA UN DATO DENOMINATORE.

152. ***Si moltiplichi l' intero per il dato denominatore, ed il prodotto sarà il numeratore cercato.***

Sia l' intero 15 che voglia ridursi in numero frazionario il quale abbia per denominatore 24. Si moltiplicherà 15 per 24, ed il prodotto 360 sarà il numeratore che si cercava, perciò l' intero 15 verrà eguale a $\frac{360}{24}$.

Dim. In effetti, siccome un' unità è uguale a $\frac{24}{24}$, 15 unità saranno eguali a $\frac{24}{24}$ moltiplicato per 15, il che sappiamo che

si fa moltiplicando il numeratore per 15, senza alterare il denominatore; perciò verrà $15 = \frac{24 \times 15}{24}$; dunque l'intero 15 si riduce in 24^{esimi} moltiplicando 15 per 24, e scrivendo sotto al prodotto per denominatore 24.

Ogni numero intero può scriversi sotto forma di frazione che abbia per numeratore l'intero e per denominatore l'unità.

Così p. e. l'intero 15 è uguale alla frazione $\frac{15}{1}$, la quale si enuncia, *quindici diviso per uno.*

Perchè la detta espressione si può riguardare come quella in cui l'unità si è divisa per 1, ossia pel denominatore, ed il quoziente 1 che si ottiene si prende 12 volte, cioè quante volte lo dinota il numeratore. Inoltre la medesima espressione equivale al quoziente che si ottiene dividendo il numeratore 12 pel denominatore 1.

RIDUZIONE DI UN INTERO ED UN FRATTO IN UN SOL NUMERO FRAZIONARIO.

153. *Per ridurre un intero ed un fratto ad un sol numero frazionario, si moltiplichi l'intero pel denominatore della frazione, al prodotto si aggiunga il numeratore, e sotto la somma si scriva per denominatore quello della medesima frazione* (*).

Sia l'intero 9 e la frazione $\frac{5}{7}$ che vogliasi ridurre ad un sol numero frazionario, Si moltiplichi 9 per 7, ed al prodotto 63 si aggiunga il numeratore 5, e si avrà per somma 68; poi sotto questa somma si scriva per denominatore lo stesso denominatore 7 della data frazione, ed il numero frazionario $\frac{68}{7}$ che ne risulta sarà quello cercato.

Dim. Dovendosi unire l'intero 9 alla frazione $\frac{5}{7}$ per far-

(*) Questa operazione si enuncia anche così: *mettere sotto forma frazionaria un intero ed un fratto.* E la regola per eseguirla può anche enunciarsi con semplicità nel seguente modo. *Si aggiunga al numeratore il prodotto del suo denominatore per l'intero.*

ne un sol numero frazionario, convertiamo l'intero 9 in *settimi*, e poi vi aggiungiamo i $\frac{5}{7}$; ora 9 si converte in *settimi* moltiplicandolo per 7, e si avrà che 9 viene eguale a 63 *settimi*, e siccome vi dobbiamo aggiungere $\frac{5}{7}$, uniremo perciò il numeratore 5 al prodotto 63 e si avranno 68 *settimi;* quindi l'intero 9 e la frazione $\frac{5}{7}$ equivalgono al numero frazionario $\frac{68}{7}$.

154. Se un intero meno un fratto si volesse ridurre ad un sol numero frazionario, bisogna moltiplicare l'intero pel denominatore, e togliere dal prodotto il numeratore, e sotto al resto si scrive lo stesso denominatore.

Così p. e. volendo ridurre $5 - \frac{3}{7}$ ad un sol numero frazionario, si moltiplicherà 5 per 7, e dal prodotto 35 se ne toglie il numeratore 3, e sotto al resto 32 si scriverà il denominatore 7, e si avrà la frazione $\frac{32}{7}$ uguale a $5 - \frac{3}{7}$.

La dimostrazione è la stessa del n.° precedente, sol che, invece di aggiungere il numeratore, si deve togliere.

CONVERTIRE UNA FRAZIONE IN UN' ALTRA CHE ABBIA UN DIVERSO DENOMINATORE.

155. *Si moltiplichi il numeratore della frazione pel nuovo denominatore, ed il prodotto si divida pel denominatore della frazione data; il quoziente che si ottiene sarà il numeratore della frazione cercata.*

La nuova frazione poi sarà uguale alla proposta se la divisione riesce esatta; ma se non viene esatta, ne differisce per una frazione minore di quella che ha per numeratore l'unità, e per denominatore il nuovo denominatore.

Sia p. e. la frazione $\frac{3}{7}$ che voglia ridursi in un'altra avente per denominatore 28. Si moltiplicherà il numeratore 3 per 28, e si avrà per prodotto 84; poi si dividerà 84 pel denominatore 7 della data frazione, e si avrà per quoziente 12;

così la frazione $\frac{12}{28}$ che ha per numeratore il quoziente 12 sarà uguale allla proposta.

Dim. Sappiamo che la frazione $\frac{3}{7}$ è uguale al quoziente che si ottiene dividendo 3 per 7; or se riduciamo il numeratore 3 in *ventottesimi*, il che si fa moltiplicando 3 per 28; allora invece di dividere 3 per 7, potremo dividere il numero 84 de' *ventottesimi* che ne risulta per 7, e perciò il quoziente 12 che si ottiene esprimerà *ventottesimi;* ma questo quozionte pareggia la frazione proposta, dunque essa è uguale a $\frac{12}{28}$.

Se poi la frazione $\frac{3}{7}$ voglia convertirsi p. e. in 20^{mi}; in questo caso il prodotto di 3 pel nuovo denominatore 20, che è 60, non è divisibile pel denominatore 7 della frazione data; quindi ne conchiudiamo che la data frazione non è convertibile esattamente in 20^{mi}; ma essa essendo eguale a 60 *ventesimi* da dividersi per 7, eseguendo la divisione, risulta eguale ad 8 *ventesimi,* e vi restano altri 4 ventesimi da dividersi per 7 che fanno $\frac{4}{7}$ di $\frac{1}{20}$. Perciò, in tal caso la frazione $\frac{3}{7}$ viene eguale ad $\frac{8}{20}+\frac{4}{7}$ di $\frac{1}{20}$.

Trascurando la parte $\frac{4}{7}$ di $\frac{1}{20}$, si avrà *prossimamente* $\frac{3}{7}=\frac{8}{20}$, differendosi dal vero per $\frac{4}{7}$ di $\frac{1}{20}$; cioè per meno di $\frac{1}{20}$ dell' unità, ossia, per una parte dell' unità minore di quella indicata dal nuovo denominatore.

156. Da quanto si è detto si desume che le condizioni affinchè una frazione possa ridursi esattamente ad un altra di dato denominatore sono, o che il dato denominatore sia multiplo di quello della frazione, o che tutti i fattori del denominatore della frazione sieno compresi tra i fattori del suo numeratore e del denominatore dato.

Così p. e. avendosi le frazioni $\frac{7}{16}$ e $\frac{6}{15}$, la prima è ridu-

cibile esattamente in un' altra che ha per denominatore 48, perchè 16 essendo fattore di 48, sarà anche fattore di 7×48; la seconda è riducibile esattamente in un' altra che ha per denominatore 35, perchè i fattori di 15, che sono 3 e 5, sono compresi fra i fattori del numeratore 6 e del dato denominatore 35; e perciò il prodotto 6×35 avendo per fattori tutti quelli di 15, sarà divisibile esattamente per 15.

RIDUZIONE DELLE FRAZIONI AL MEDESIMO DENOMINATORE.

157. *Più frazioni si riducono al medesimo denominatore, senza cambiar valore, moltiplicando i termini di ciascuna pel prodotto de' denominatori di tutte le altre.*

Sieno le frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, che vogliansi ridurre al medesimo denominatore.

Moltiplicando i termini della prima pel prodotto 5×7 dei denominatori delle altre due, e quelli della seconda pel prodotto 4×7, e quelli della terza pel prodotto 4×5, si avranno così le seguenti frazioni

$$\frac{3 \times 5 \times 7}{4 \times 5 \times 7}, \quad \frac{2 \times 4 \times 7}{5 \times 4 \times 7}, \quad \frac{4 \times 4 \times 5}{7 \times 4 \times 5};$$

ed effettuando le operazioni indicate, si ridurranno alle frazioni $\frac{105}{140}$, $\frac{56}{140}$, $\frac{40}{140}$, le quali hanno tutte lo stesso denominatore, e sono rispettivamente uguali alle proposte.

Dim. In effetti, le proposte frazioni non cambiano valore, perchè i termini di ciascuna vengono a moltiplicarsi ambedue per lo stesso numero; inoltre esse riduconsi al medesimo denominatore, perchè il denominatore di ognuna si forma dal prodotto de' denominatori di tutte le frazioni, e questo prodotto è sempre lo stesso, comunque si permuti l' ordine di moltiplicazione de' suoi fattori (n.° 61).

158. Allorchè le frazioni sono due ed i denominatori hanno un fattor comune, si possono ridurre ad un comun denominatore più semplice del prodotto dei denominatori, moltiplicando i termini della prima pel fattore non comune del denominatore della seconda, ed i termini della seconda pel fattore non comune del denominatore della prima. Così acqui-

stano un medesimo denominatore, perchè si compone dal prodotto del fattor comune e dei due fattori non comuni.

Sieno p, e. le frazioni $\frac{3}{12}$, $\frac{11}{20}$ i cui denominatori hanno per fattore comune 4, ed i fattori non comuni sono 3 e 5; esse si riducono al medesimo denominatore moltiplicando i termini della prima per 5, e quelli della seconda per 3, e divengono $\frac{15}{60}$, $\frac{33}{60}$, aventi per comun denominatore 60, che è più semplice del prodotto 240 dei loro denominatori.

159. *Più frazioni si riducono ad un comun denominatore che sia multiplo comune dei loro denominatori, dividendo questo multiplo per il denominatore di ciascuna frazione, e poi i due termini della frazione si multiplicheranno pel quoziente.*

Sieno p. e. le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, che vogliansi ridurre ad avere per comun denominatore 12 il quale è un multiplo dei loro denominatori. Dividiamo 12 per i denominatori delle stesse, e si hanno per rispettivi quozienti 4, 3, 6, 2, poi moltiplichiamo ambedue i termini di ciascuna frazione per il rispettivo quoziente, cioè quelli della prima per 4, quelli della seconda per 3, quelli della terza per 6, e quelli della quarta per 2, e si avranno le frazioni $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{10}{12}$ ridotte al medesimo denominatore.

È chiaro poi che basta moltiplicare i soli numeratori, perchè sappiamo che il denominator comune è il detto multiplo.

Dim. Ciascuna frazione non si altera perchè si moltiplicano i suoi termini pel medesimo numero; inoltre essa acquista per denominatore il detto multiplo, perchè il denominatore primitivo, che ha fatto da divisore, moltiplicato per il quoziente ottenuto, deve produrre il cennato multiplo che ha fatto da dividendo.

Si potrebbe scegliere per multiplo comune dei denominatori il loro minimo multiplo, ed allora si ridurranno ad avere per denominator comune questo minimo multiplo, che è più semplice di quello dato dalla regola generale, che è il prodotto dei loro denominatori, e solo può essergli eguale quando i denominatori sono tutti numeri primi fra loro.

Così p. e. avendosi le frazioni $\frac{23}{1176}$, $\frac{17}{5400}$, $\frac{61}{6237}$ che voglionsi ridurre ad avere per comun denominatore il minimo multiplo dei loro denominatori; troveremo prima questo minimo multiplo che è $2^3.3^4.5^2.7^2.11=8731800$, e riducendole ad avere per comun denominatore questo minimo multiplo, verranno eguali a $\frac{170775}{8731800}$, $\frac{27489}{8731800}$, $\frac{85400}{8731800}$.

Facciamo osservare che nel dividere il minimo multiplo per il denominatore, queste divisioni possono farsi sopprimendo da esso i fattori dei denominatori $2^3.3.7^2$, $2^3.3^3.5^2$, $3^4.7.11$, i quali sono tutti messi in evidenza.

Così nel nostro esempio sopprimendo successivamente dal minimo multiplo che è $2^3.3^4.5^2.7^2.11$, i fattori di ciascun denominatore, si hanno per rispettivi quozienti $3^3.5^2.11=7425$, $3.7^2.11=1617$, $2^3.5^2.7=1400$; e poi moltiplicando i numeratori rispettivamente per questi quozienti, si avranno le frazioni di sopra.

160. Se poi le frazioni vogliansi ridurre ad un comun denominatore che sia il più picciolo possibile, conviene che prima si rendano irriducibili, e poi riducansi ad avere per comun denominatore il minimo multiplo dei nuovi denominatori che acquistano.

In effetti, se le frazioni sono capaci di esser ridotte ad altra più semplice espressione, il minimo multiplo dei loro denominatori è diverso dal minimo multiplo dei denominatori delle stesse frazioni ridotte a minimi termini, per la ragione che i fattori primi dei denominatori delle frazioni rese irrudicibili entrano nel minimo multiplo con un esponente minore di quello con cui vi entrano quando non sono irriducibili. Così p. e. il minimo multiplo dei denominatori delle frazioni $\frac{15}{18}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{7}$ è 630, ed il minimo multiplo dei denominatori delle stesse frazioni quando la prima è ridotta a minimi termini è 210 che è minore di 360.

Per dimostrare che quando sono irriducibili, il minimo multiplo dei denominatori è il comun denominatore più picciolo a cui possono ridursi le frazioni; indichiamo con $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ le frazioni proposte, e con m il minimo multiplo dei loro denominatori; e supponiamo che si potessero ridurre ad un comun denominatore minore di m, che dinotiamo con n; e sieno $\frac{a'}{n}$, $\frac{b'}{n}$, $\frac{c'}{n}$ le nuove frazioni equivalenti rispettivamente alle date. Le frazioni date essendo irriducibili sarà n multiplo di b, di d, e di f (n.° 146); e perciò n sarà maggiore di m, che è il

minimo multiplo di b, d, ed f (n.° 122), e non già minore come si presumeva.

MANIERA DI CONOSCERE QUALE DI DUE FRAZIONI È MAGGIORE.

161. Siccome di due frazioni ridotte al medesimo denominatore, è maggiore quella che ha il numeratore maggiore, ne segue che per conoscere di due frazioni qual' è maggiore, basta moltiplicare il numeratore della prima pel denominatore della seconda, ed il numeratore della seconda pel denominatore della prima; e sarà maggiore la prima o la seconda, secondo che risulta maggiore il primo, o il secondo prodotto.

Alle volte si conosce a colpo d'occhio quale di due frazioni è maggiore, osservando se una è maggiore di un mezzo, e l'altra no; il che si scorge dall'essere il numeratore più grande o più piccolo della metà del denominatore.

Si può anche conoscere quale di due frazioni sia maggiore, osservando se quella che ha il denominatore maggiore ha poi il numeratore eguale o minore di quello dell'altra; perchè la prima dinotando parti più picciole dell'unità, e prendendosene meno o al più tante quante se ne prendono nella seconda, la prima sarà minore della seconda.

ADDIZIONE DELLE FRAZIONI.

162. *Se le frazioni date hanno lo stesso denominatore si addizionano i loro numeratori, e sotto la somma si scrive per denominatore il denominator comune. Se poi hanno denominatori differenti, si ridurranno prima al medesimo denominatore, e poi se ne fa l'addizione.*

Sieno p. e. da addizionarsi le frazioni $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{2}{11}$, le quali hanno lo stesso denominatore. Addizionando i loro numeratori, si avrà per somma 10, e scrivendo sotto a 10 per denominatore 11, si avrà la frazione $\frac{10}{11}$; laonde $\frac{10}{11}$ sarà la somma delle frazioni proposte.

Sieno poi da addizionarsi più frazioni che hanno denominatori differenti, come sono p. e. le frazioni $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{8}$.

Riducendole prima al medesimo denominatore (n.° 157), esse diverranno rispettivamente uguali alle tre seguenti

$$\frac{168}{280},\quad \frac{80}{280},\quad \frac{175}{280},$$

le quali addizionandosi come quelle che hanno lo stesso denominatore, la somma sarà $\frac{423}{280} = 1\frac{143}{280}$.

Dim. Ragionando sul primo esempio: È manifesto che dovendosi addizionare le frazioni $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{2}{11}$, la loro somma deve contenere tanti undicesimi quanti ne contengono le frazioni date, cioè deve contenerne $3+5+2$, ossia 10; quindi la frazione $\frac{10}{11}$, che contiene tanti undicesimi quanti ne contengono tutte le frazioni date, sarà la loro somma. Similmente si ragiona sul secondo esempio, e su di ogni altro.

La ragione per cui le frazioni date debbonsi ridurre al medesimo denominatore è la seguente. La frazione unica eguale alla loro somma dovendo comporsi di parti eguali dell' unità, cioè di parti espresse dal medesimo denominatore, il solo mezzo che vediamo di poter formare questa frazione unica, si è di ridurre le frazioni date al medesimo denominatore; perchè poi addizionando i loro numeratori, si avrà una frazione equivalente alla loro somma.

163. Se tra le frazioni date ad addizionare si trovassero alcune del medesimo denominatore, ovvero tali da potersi ridurre brevemente ad un comun denominatore più semplice di quello che si ottiene col metodo generale; allora riesce utile far prima la somma di queste frazioni, e poi questa somma si addizionerà con le rimanenti.

Così dovendosi eseguire la seguente addizione

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{9}+\frac{7}{8}+\frac{4}{5}+\frac{3}{8};$$

osserviamo che le due prime frazioni possono tosto ridursi al medesimo denominatore moltiplicando i due termini della prima per 3; faremo perciò una tal riduzione, e poi le sommeremo, e si avrà per somma $\frac{11}{9}=1\frac{2}{9}$. Inoltre osservando che le due frazioni $\frac{7}{8}$ e $\frac{3}{8}$ hanno già lo stesso denominatore, la loro somma sarà $\frac{10}{8}=1\frac{1}{4}$. Dunque l' addizione delle fra-

zioni date si riduce a quella dei numeri 2, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{5}$, la quale effettuandosi, si avrà per somma

$$2+\frac{40+45+144}{180}=2\frac{229}{180}=3\frac{49}{180}.$$

164. Allorchè le frazioni da addizionarsi sono accompagnate da numeri interi, si addizioneranno separatamente le frazioni e gli interi; e se la somma delle frazioni risultasse spuria, se n' estrarrà l' intero per unirlo alla somma degl' interi.

Sia p. e. da eseguirsi l' addizione

$$13+\frac{2}{3}+7\frac{3}{5}+16\frac{1}{2}.$$

Riduciamo prima le frazioni al medesimo denominatore per addizionarle, e la somma sarà

$$\frac{20+18+15}{30}=\frac{53}{30}=1\frac{23}{30};$$

ed addizionando l' intero 1 con gl' interi 13, 7, e 16, e scrivendo affianco al risultato la frazione $\frac{23}{30}$, si avrà la somma cercata che sarà $37\frac{23}{30}$.

SOTTRAZIONE DELLE FRAZIONI.

165. *Se le frazioni date hanno il medesimo denominatore, si toglierà il numeratore dal numeratore, e sotto al resto si scriverà il denominator comune: se poi hanno denominatori differenti, si ridurranno prima al medesimo denominatore, ed indi si farà la sottrazione.*

Sia p. e. la frazione $\frac{5}{8}$ che debba togliersi dall' altra $\frac{7}{8}$, la quale ha lo stesso denominatore. Togliendo dal numeratore 7 il numeratore 5, si ha per resto 2, e scrivendo sotto a 2 il denominatore 8, si ha la frazione $\frac{2}{8}$; laonde questa frazione sarà il resto cercato.

Sia poi la frazione $\frac{3}{5}$ che debba sottrarsi dall' altra $\frac{8}{9}$ di

diverso denominatore. Riducendo queste due frazioni al medesimo denominatore, si avrà che $\frac{8}{9}-\frac{3}{5}=\frac{40}{45}-\frac{27}{45}$; ed eseguendo la sottrazione come per le frazioni che hanno lo stesso denominatore, si troverà che $\frac{8}{9}-\frac{3}{5}=\frac{13}{45}$.

Dim. Ragionando sul primo esempio: È manifesto che dovendosi togliere 5 *ottavi* da 7 *ottavi* debbono rimanervi tanti *ottavi* quanti ne dinota l'eccesso di 7 su 5, che è 2; quindi la frazione $\frac{2}{8}$ sarà il resto che si cercava. Similmente si ragiona sul secondo esempio, e su qualunque altro.

Avvertimento. Se dopo aver ridotte le frazioni al medesimo denominatore, succede che il numeratore della frazione da sottrarsi sia maggiore di quello dell'altra; allora la frazione da togliersi essendo maggiore di quella da cui deve togliersi, la sottrazione non può eseguirsi.

166. Allorchè un intero ed una frazione deve sottrarsi da un intero accompagnato da una frazione si toglierà prima la frazione dalla frazione, e poi l'intero dall'intero.

Così p. e. se dovesse togliersi $8\frac{3}{7}$ da $12\frac{5}{8}$; si avrà

$$12\frac{5}{8}-8\frac{3}{7}=12\frac{35}{56}-8\frac{24}{56}=4\frac{11}{56}.$$

Ma se la frazione da sottrarsi fosse maggiore di quella che soffre la sottrazione, questa si farà imprestare una unità dall'intero che l'accompagna, e poi si farà la sottrazione, avvertendo che l'unità si unisce ad una frazione sommando il numeratore col denominatore, e sotto la somma scrivendo lo stesso denominatore (n.° 153).

Così, se dovesse togliersi $8\frac{7}{8}$ da $12\frac{3}{7}$, si avrà

$$12\frac{3}{7}-8\frac{7}{8}=12\frac{24}{56}-8\frac{49}{56}=11\frac{80}{56}-8\frac{49}{56}=3\frac{31}{56}.$$

Nella pratica dopo addizionato il numeratore della frazione $\frac{24}{56}$ col suo denominatore, sotto la somma 80 si scrive

il numeratore 49 che si sottrae da essa, e così si ottiene il numeratore 31 della frazione residuale.

167. Se da un intero deve togliersi una frazione, un'unità dell'intero si scrive sotto forma di frazione che abbia lo stesso denominatore della frazione data, e poi da quest'unità così scritta si toglie la data frazione, il che si riduce a togliere il numeratore dal denominatore, ed il resto sarà il numeratore della frazione residuale, la quale si scriverà allianco all'intero diminuito di un'unità.

Così p. e. $9-\frac{4}{7}=8\frac{7}{7}-\frac{4}{7}=8\frac{3}{7}$.

MOLTIPLICAZIONE DELLE FRAZIONI.

168. Occorrendo spesso prendere una certa parte di un numero p. e. i $\frac{3}{4}$, il risultato, che è i $\frac{3}{4}$ del numero dato, si forma per mezzo di questo numero della stessa guisa che $\frac{3}{4}$ si forma per mezzo dell'unità. Dunque in tal caso si fa un'operazione simile a quella che si fa nella moltiplicazione degl'interi, in cui il prodotto si forma per mezzo del moltiplicando della stessa maniera che il moltiplicatore si forma per mezzo dell'unità. Ecco perchè quando di un numero bisogna prendere una certa parte, p. e. i $\frac{3}{4}$, chiamiamo questa operazione *moltiplicazione*, e diciamo che il numero si moltiplica per $\frac{3}{4}$. Perciò possiamo dare una definizione più generale della moltiplicazione, che convenga tanto agl'interi quanto alle frazioni: diremo dunque che:

La *moltiplicazione* è quell'operazione in cui essendo dati due numeri, se ne vuol trovare un terzo il quale si componga per mezzo di uno dei due dati, detto *moltiplicando*, della stessa guisa che l'altro, detto *moltiplicatore*, si compone per mezzo dell'unità.

Così p. e. volendosi moltiplicare un numero per 8, vuol dire che convien trovare un terzo numero, il quale si componga dal moltiplicando preso 8 volte, come il moltiplicatore

è composto da 8 volte l'unità. E volendosi moltiplicare un numero per $\frac{4}{5}$, vuol dire che il prodotto deve essere i $\frac{4}{5}$ del moltiplicando, come il moltiplicatore è i $\frac{4}{5}$ dell'unità. Dunque, moltiplicare un numero per $\frac{4}{5}$, vuol dire che si debbono prendere i $\frac{4}{5}$ del moltiplicando.

Avvertimento. Nella moltiplicazione dei numeri interi ripetendosi il moltiplicando tante volte quante unità sono nel moltiplicatore, il prodotto è maggiore del moltiplicando. Ma nella moltiplicazione di un numero per una frazione vera, il prodotto è minore del moltiplicando. Così p. e., se il moltiplicatore è $\frac{4}{7}$, il prodotto dovendo essere i $\frac{4}{7}$ del moltiplicando, sarà minore di esso moltiplicando.

169. Nella moltiplicazione delle frazioni due sono i casi principali; uno è quello di moltiplicare una frazione per un intero, l'altro è quello di moltiplicare un numero qualunque per un fratto; ma questo secondo caso lo distingueremo in due, cioè in quello di un fratto per un fratto, e in quello di un intero per un fratto, e così ridurremo la moltiplicazione ai tre seguenti casi.

1.° Caso. *Una frazione si moltiplica per un intero moltiplicando il numeratore per l'intero.*

Sia p. e. la frazione $\frac{9}{11}$ da moltiplicarsi per 4. Moltiplicheremo il numeratore per 4, ed avremo la frazione $\frac{36}{11}$ che sarà il prodotto cercato.

Difatti, si sa dalle proprietà delle frazioni che se il numeratore di una frazione si moltiplica per un numero, la frazione si moltiplicherà per lo stesso numero.

Avvertimento. Una frazione si moltiplica anche per un intero, dividendo, quando si può, il suo denominatore per l'intero; ed in questa seconda maniera si giunge ad un risultato più semplice. Così p. e., se la frazione $\frac{7}{12}$ dovesse moltiplicarsi per 3; ciò può farsi dividendo il suo denominatore

per 3, e si ha per prodotto la frazione $\frac{7}{4}$. In effetti, sappiamo dalle proprietà delle frazioni che una frazione si moltiplica per un intero, dividendo il denominatore per l'intero.

2.° Caso. *Due frazioni si moltiplicano fra loro moltiplicando i numeratori fra loro ed i denominatori fra loro, e dividendo il primo prodotto pel secondo.*

Sia p. e. la frazione $\frac{3}{7}$ da moltiplicarsi per l'altra $\frac{4}{5}$. Moltiplicando i numeratori fra loro ed i denominatori fra loro si ottiene il prodotto cercato, che è la frazione $\frac{12}{35}$.

Dim. Dovendo moltiplicarsi $\frac{3}{7}$ per $\frac{4}{5}$, vuol dire che debbonsi prendere i $\frac{4}{5}$ di $\frac{3}{7}$; cioè si deve prendere prima la quinta parte di $\frac{3}{7}$ e poi ripeterla 4 volte, ma la quinta parte di $\frac{3}{7}$ sappiamo che si ottiene moltiplicando il denominatore per 5. perciò essa è $\frac{3}{7\times5}$, e questa quinta parte si ripete 4 volte moltiplicando il numeratore per 4; perciò il prodotto sarà $\frac{3\times4}{7\times5}=\frac{12}{35}$: quindi esso si ottiene moltiplicando i numeratori fra loro ed i denominatori fra loro, e dividendo il primo pel secondo prodotto.

3.° Caso. *Un intero si moltiplica per una frazione moltiplicando l'intero pel numeratore.*

Sia l'intero 8 da moltiplicarsi per $\frac{4}{11}$. Moltiplichiamo l'intero 8 pel numeratore 4, e si avrà il cercato prodotto che è $\frac{32}{11}$.

Dim. Scrivendo l'intero 8 sotto forma frazionaria avente per denominatore l'unità, l'operazione si riduce a moltiplicare la frazione $\frac{8}{1}$ per l'altra $\frac{4}{11}$, e si ha per prodotto $\frac{8\times4}{11}=\frac{32}{11}$; perciò il prodotto si ottiene moltiplicando l'intero per il numeratore.

Senza scrivere l' intero 8 sotto forma frazionaria avente per denominatore l' unità, si potrebbe applicare lo stesso ragionamento precedente.

Se dovesse moltiplicarsi un intero ed un fratto per un intero ed un fratto, si ridurrà ciascun intero col fratto che l' accompagna ad un sol numero frazionario, e poi si moltiplicheranno fra loro i numeri frazionarii che ne risultano.

Così dovendosi moltiplicare $8\frac{3}{4}$ per $5\frac{2}{7}$; riducendo $8\frac{3}{4}$ ad un sol numero frazionario, ne verrà $\frac{35}{4}$; e riducendo similmente $5\frac{2}{7}$, ne verrà $\frac{37}{7}$: laonde l' operazione si riduce a dover moltiplicare la frazione $\frac{35}{4}$ per l' altra $\frac{37}{7}$, il che effettuandosi, si ottiene per prodotto $\frac{1295}{28}=46\frac{7}{28}=46\,\frac{1}{4}$.

Se poi uno solo de' fattori fosse un intero accompagnato da un fratto, e l' altro fosse soltanto intero; allora riesce meglio far la moltiplicazione *per parti*.

Così p. e. dovendo moltiplicarsi $7\frac{3}{5}$ per 8; si moltiplicherà prima la parte 7 del moltiplicando per 8, e si avrà per prodotto 56; poi si moltiplicherà l' altra parte $\frac{3}{5}$ per 8, e si avrà il prodotto $\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}$; indi si farà la somma di questi prodotti parziali e si otterrà il prodotto totale che sarà

$$56+4\frac{4}{5}=60\frac{4}{5}.$$

OSSERVAZIONI SULLA MOLTIPLICAZIONE DELLE FRAZIONI.

170. I teoremi dimostrati (n.ri 61 e 62) rispetto agl' interi possono ora estendersi a due numeri qualsivogliano, e ne concluderemo in generale che:

1.° *Il prodotto di più fattori non cambia, comunque s' inverta l' ordine de' fattori.*

2.° *Per moltiplicare un numero pel prodotto di più fattori, basta moltiplicarlo successivamente per ciascuno di questi fattori.*

Dim. Difatti, riducendo ciascuno dei fattori a numero frazionario, l' operazione si riduce a dover formare il prodotto de' loro numeratori e quello de' loro denominatori, i quali essendo prodotti di numeri interi, valgono rispetto ad essi le enunciate verità.

171. Essendosi veduto che se si vogliono prendere i $\frac{5}{9}$ di $\frac{3}{8}$ equivale a dire che la seconda frazione deve moltiplicarsi per la prima; e poichè il risultato $\frac{15}{72}$ è una *frazione di frazione* ne segue che

Una frazione di frazione si riduce ad una sola frazione moltiplicando fra loro le frazioni date.

Ora se della frazione $\frac{15}{72}$, la quale è i $\frac{5}{9}$ di $\frac{3}{8}$, si volesse di nuovo prendere una frazione, p. e. i $\frac{2}{3}$, il risultato $\frac{30}{216}$ sarà i due terzi dei cinque noni di tre ottavi, cioè sarà una frazione di frazione ridotta ad una sola frazione; e si vede che per potersi ottenere bisogna molplicare le tre frazioni fra loro.

Similmente si procederebbe se le frazioni fossero più di tre.

172. Allorchè si moltiplicano più frazioni fra loro, è utile lasciar prima accennate le moltiplicazioni nel numeratore e nel denominatore del prodotto cercato; poichè spesso accade che veggonsi a colpo d' occhio i fattori comuni, i quali supprimendosi, si perviene brevemente ad un risultato più semplice. Così p. e. dovendosi fare il prodotto delle tre frazioni $\frac{8}{15}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{12}$; lasciando in principio accennate le moltiplicazioni nel numeratore e nel denominatore, il prodotto sarà $\frac{8\times3\times7}{15\times7\times12}$, e supprimendosi i fattori comuni 3, 4, e 7 al numeratore ed al denominatore, il cercato prodotto si riduce a $\frac{2}{15}$, che è più semplice dell' altro $\frac{168}{1260}$ il quale si otterrebbe senza sopprimere i fattori comuni.

DIVISIONE DELLE FRAZIONI.

173. La divisione delle frazioni, come si disse per gl' interi, è quell' operazione in cui essendo dato un prodotto ed un fattore, si cerca l' altro fattore.

Ma osserviamo che quando il divisore è una frazione non può aversi in mira di dividere il dividendo in parti eguali, e perciò il quoziente non denota una delle parti eguali in cui si divide il dividendo, ma esprime quanto è il dividendo rispetto al divisore, cioè, se p.e. è il doppio, il triplo, ec. del divisore, ovvero è i $\frac{2}{3}$, i $\frac{3}{5}$, ec. del divisore. Così, se il divisore dovesse moltiplicarsi per $\frac{3}{5}$ per produrre il dividendo, $\frac{3}{5}$ sarà il quoziente, ed esso dinota che il dividendo è i $\frac{3}{5}$ del divisore.

174. Due sono i casi principali della divisione delle frazioni; uno è quello in cui il dividendo è fratto ed il divisore è intero; l' altro è quello in cui il divisore è fratto, qualunque sia il dividendo.

1.° Caso. *Una frazione si divide per un intero moltiplicando il denominatore per l'intero.*

Sia p. e. la frazione $\frac{4}{9}$ da dividersi per 7. Moltiplicheremo il denominatore per 7, e si avrà la frazione $\frac{4}{63}$ che sarà il quoziente cercato.

Difatti, sappiamo dalle proprietà delle frazioni che una frazione si divide per un intero moltiplicando il denominatore per l'intero.

Avvertimento. Una frazione può anche dividersi per un intero, dividendo, quando si può, il numeratore per l'intero; ed in questa seconda maniera, che non è sempre possibile, si giunge ad un risultato più semplice.

Così p. e. volendosi dividere la frazione $\frac{12}{13}$ per 6; osservando che il numeratore è divisibile per 6, si dividerà per 6, e si avrà la frazione $\frac{2}{13}$ che sarà il quoziente cercato.

Infatti, sappiamo dalle proprietà delle frazioni che una frazione si divide per un intero dividendo il numeratore per intero.

2.° Caso. *Un numero si divide per una frazione moltiplicando il dividendo pel divisore capovolto.*

Sia la frazione $\frac{4}{9}$ da dividersi per la frazione $\frac{3}{5}$. Moltiplichiamo il dividendo pel divisore capovolto, cioè per $\frac{5}{3}$, e si avrà per risultato $\frac{20}{27}$ che è il quoziente cercato.

Dim. Siccome il quoziente ignoto moltiplicato pel divisore $\frac{3}{5}$ deve dare il dividendo, ne segue che il dividendo è i $\frac{3}{5}$ del quoziente ignoto ; perciò se lo dividiamo per 3 , il che sappiamo che si fa moltiplicando il denominatore per 3 , il risultato $\frac{4}{9 \times 3}$ sarà $\frac{1}{5}$ del quoziente ignoto; adunque se moltiplichiamo questo risultato per 5 , si avrà il quoziente che si cerca, che sarà $\frac{4 \times 5}{9 \times 3}$; perciò esso si ottiene moltiplicando il dividendo per il divisore rovesciato.

Sia ora l'intero 7 da dividersi per $\frac{5}{9}$. Moltiplichiamo l'intero 7 per $\frac{9}{5}$ che è il divisore rovesciato, e si avrà per risultato $\frac{63}{5} = 12\frac{3}{5}$ che sarà il quoziente cercato.

Difatti, scrivendo il dividendo 7 sotto forma frazionaria avente per denominatore l'unità, l'operazione si riduce a dividere $\frac{7}{1}$ per $\frac{5}{9}$, e quindi il quoziente sarà $\frac{7\times9}{5}$; cioè si ottiene moltiplicando il dividendo per il divisore capovolto.

Senza scrivere il dividendo sotto forma frazionaria, potrebbe applicarsi lo stesso ragionamento del precedente esempio, che è generale, qualunque sia il dividendo.

Se un intero ed un fratto dovesse dividersi per un intero ed un fratto; si ridurrà ciascun intero con la frazione che l'accompagna ad un sol numero frazionario, e poi si farà la divisione.

Così dovendosi dividere $5\frac{3}{8}$ per $9\frac{2}{3}$. Riducendo $5\frac{3}{8}$ ad un sol numero frazionario, ne verrà la frazione $\frac{43}{8}$; e riducendo similmente $9\frac{2}{3}$, si avrà la frazione $\frac{29}{3}$. Dunque l'operazione si è condotta a dividere la frazione $\frac{43}{8}$ per l'altra $\frac{29}{3}$; perciò il quoziente sarà $\frac{43\times3}{8\times29} = \frac{129}{232}$.

GENERALIZZAZIONE DI ALCUNI TEOREMI RELATIVI ALLA DIVISIONE.

175. ***Se il dividendo ed il divisore si moltiplicano o si dividono per lo stesso numero, il quoziente non si altera.***

Indichiamo il dividendo con a, il divisore con b, il quoziente con q, ed il moltiplicatore con m. Il dividendo essendo eguale al divisore moltiplicato pel quoziente, si ha l'eguaglianza $a=b\times q$; e moltiplicando queste grandezze eguali per m, si avrà $a\times m=b\times q\times m$, e dividendo queste nuove grandezze eguali per $b\times m$, si avrà $\frac{a\times m}{b\times m} = q$. Ecco dunque dimostrata la prima parte del teorema.

Passiamo ora a dimostrare la seconda parte, cioè che, se $a:b=q$, sarà anche $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=q$. Difatti, moltiplicando per

m tanto il dividendo che il divisore di questa seconda divisiono, il quoziente non si altera; ma il dividendo ed il divisore moltiplicati per m divengono rispettivamente eguali ad a e b, ed $a:b=q$; perciò anche $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}=q$.

176. *Se si moltiplica o divide il dividendo per un numero, il quoziente nel primo caso si moltiplica, e nel secondo si divide per lo stesso numero.*

Considerando il primo caso: Sia a il dividendo, b il divisore, q il quoziente, si avrà $a=b\times q$; e moltiplicando per m, si avrà $a\times m=b\times q\times m$, e dividendo per b, si avrà $\frac{a\times m}{b}=q\times m$; il che bisognava dimostrare.

Passiamo ora al secondo caso; perciò dividiamo l'eguaglianza $a=b\times q$ per $b\times m$, e si avrà $\frac{a}{b\times m}=\frac{b\times q}{b\times m}=\frac{q}{m}$; perchè nel secondo membro il dividendo $b\times q$ ed il divisore $b\times m$, dividendosi ambedue per b, il quoziente non si altera.

177. *Se si moltiplica o divide il divisore per un numero, il quoziente nel primo caso si divide, e nel secondo si moltiplica per lo stesso numero.*

Contemplando il primo caso: si ha $a=b\times q$; ma siccome il dividendo deve dividersi per un nuovo divisore, che è $b\times m$, si avrà $\frac{a}{b\times m}=\frac{b\times q}{b\times m}=\frac{q}{m}$; il che bisognava dimostrare.

Nel secondo caso, dico che $a:\frac{b}{m}=q\times m$. Difatti, moltiplicando il dividendo ed il divisore per m, il quoziente rimane lo stesso; ma il dividendo ed il divisore moltiplicati per m divengono rispettivamente $a\times m$ e b; dunque il quoziente è uguale a quello che si ottiene dal dividere $a\times m$ per b; ma $a\times m$ diviso per b dà per quoziente $q\times m$ (n.° 176); dunque anche $a:\frac{b}{m}=q\times m$.

GENERALIZZAZIONE DELLE REGOLE DEL CALCOLO DELLE FRAZIONI.

178. La regola della riduzione delle frazioni al medesimo denominatore può tenersi come dimostrata, perchè poggia sul teorema dimostrato nel n.° 175. Passiamo quindi alle regole del calcolo delle frazioni.

179. ***Le frazioni che hanno il medesimo denominatore si addizionano addizionando i loro numeratori, e dividendo la somma pel denominator comune.***

Sieno le frazioni $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$. Poniamo $\frac{a}{d}=q$, $\frac{b}{d}=q'$, $\frac{c}{d}=q''$; verrà $a=d\times q$, $b=d\times q'$, $c=d\times q''$, e sommando queste eguaglianze membro a membro, verrà
$a+b+c=d\times q+d\times q'+d\times q''$, ovvero $a+b+c=(q+q'+q'')\times d$; e dividendo i due membri pel fattore d, verrà

$$\frac{a+b+c}{d}=q+q'+q'';$$

cioè la somma $q+q'+q''$ delle frazioni si ottiene come si è detto nella regola.

È chiaro poi che: *Se le frazioni date hanno denominatori differenti, bisogna ridurle prima al medesimo denominatore, e poi si addizionano.*

180. Riguardo alla sottrazione, si può fare un ragionamento analogo a quello fatto per l'addizione.

181. *Una frazione si moltiplica per un' altra dividendo il prodotto dei numeratori per quello dei loro denominatori.*

Sia la frazione $\frac{a}{b}=q$, e l'altra $\frac{c}{d}=q'$. Sarà $a=b\times q$, e $c=d\times q'$; e moltiplicando per ordine queste due eguaglianze, si avrà $a\times c=b\times q\times d\times q'$; e dividendo questa eguaglianza per $b\times d$, si avrà $\frac{a\times c}{b\times d}=q\times q'$; dunque il prodotto $q\times q'$ delle due frazioni date si ottiene dividendo il prodotto dei numeratori per quello dei denominatori.

182. *Un numero si divide per una frazione moltiplicando il numero per la frazione rovesciata.*

Sia il numero a da dividersi per la frazione $\frac{m}{n}$, e si dinoti con q il quoziente incognito; si avrà $a=\frac{m\times q}{n}$, e moltiplicando per n, verrà $a\times n=m\times q$; e dividendo per m, verrà $\frac{a\times n}{m}=q$; dunque il quoziente q si ottiene moltiplicando il dividendo a per la frazione rovesciata.

183. *Una frazione si divide per un numero moltiplicando il denominatore per questo numero.*

Perchè scrivendo il divisore sotto forma frazionaria avente per denominatore l' unità, la cosa si riduce a dividere una frazione per un altra, il che mena al risultamento dato dalla regola.

ALCUNE RELAZIONI FRA I TERMINI DI PIU' FRAZIONI EGUALI.

184. Se più frazioni sono eguali, si hanno le seguenti relazioni.

1.° *Ciascuna pareggia la somma dei numeratori divisa per la somma dei denominatori.*

2.° *Il quadrato di ciascuna pareggia la somma dei quadrati dei numeratori divisa per la somma dei quadrati dei denominatori.*

3.° *La somma dei prodotti dei numeratori per i rispettivi denominatori pareggia la radice quadrata del prodotto della somma dei quadrati dei numeratori per la somma dei quadrati dei denominatori.*

N. B. Scriveremo per semplicità i prodotti non ponendo segno di moltiplicazione fra i fattori, come si fa nell' algebra.

Per dimostrare il primo teorema. Sia $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}$, ec.

Chiamiamo q il valore comune di ciascuna frazione, si avrà $a=bq$, $a'=b'q$, $a''=b''q$; e sommando queste eguaglianze membro a membro, verrà $a+a'+a''=bq+b'q+b''q=(b+b'+b'')\times q$; e dividendo i due membri per $b+b'+b''$, verrà $\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}=q=\frac{a}{b}$.

Per dimostrare il secondo teorema, faremo i quadrati delle date frazioni, e si avrà $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a'^2}{b'^2}=\frac{a''^2}{b''^2}$, ec.; quindi, pel primo teorema, verrà $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^2+a'^2+b'^2}{b^2+b'^2+b''^2}$. Da qui si ricava $\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{a^2+a'^2+b''^2}{b^2+b'^2+b''^2}}$; cioè, *ciascuna frazione pareggia la radice quadrata della somma dei quadrati dei numeratori divisa per la somma dei quadrati dei denominatori.*

Per dimostrare il terzo teorema; siccome $a=bq$, $a'=b'q$, $a''=b''q$..., moltiplicando ciascun' eguaglianza rispettivamente per b, b', b'', verrà $ab=b^2q$, $a'b'=b'^2q$; $a''b''=b''^2q$; e sommando membro a membro queste ultime eguaglianze, verrà $ab+a'b'+a''b''=(b^2+b'^2+b''^2)\times q$; e sostituendo a q il suo valore trovato nel teorema precedente, verrà

$$ab+a'b'+a''b''=(b'^2+b'^2+b''^2)\times\sqrt{\frac{a^2+a'^2+a''^2}{b^2+b'^2+b''^2}};$$

e facendo entrare sotto il radicale il fattore che sta fuori (n.° 96), verrà

$$ab+a'b'+a''b''=\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2)(b^2+b'^2+b''^2)}.$$

MASSIMO COMUN DIVISORE DELLE FRAZIONI.

185. Per *massimo comun divisore* di due frazioni s' intende il massimo numero che è contenuto un numero intero di volte esattamente

in una delle frazioni, ed anche un numero intero di volte esattamente nell' altra.

Per trovare il massimo comun divisore di due frazioni si ridurranno prima al medesimo denominatore, e poi si troverà quello dei loro numeratori, e la frazione che avrà per numeratore il massimo comun divisore di questi numeratori e per denominatore il denominator comune, sarà il massimo comun divisore cercato.

In effetti, nel ragionamento fatto (n.° 111) per trovare il massimo comun divisore di due nnmeri, si deve vedere quante volte il maggiore contiene il minore, e poi quante volte il minore contiene il resto, e così di seguito, indipendentemente dalla natura dei numeri; ma in due frazioni che hanno il medesimo denominatore si vede quante volte la maggiore contiene la minore, cercando quante volte il numeratore contiene il numeratore; perciò operando secondo la regola data, si troverà il loro massimo comun divisore.

ESERCIZII.

186. Per risolvere alcune delle questioni scritte qui appresso stabiliamo prima la seguente regola, che insegna a trovare il valore di più unità quando si conosce quello di una sola unità, e viceversa.

Allorchè si conosce il valore di un' unità, e si cerca quello di più unità, bisogna moltiplicare il valore dell' unità per il numero delle unità, sia intero sia frazionario.

Così p. e. se si conoscesse che una libbra di argento costa lire 72 $^1/_2$, il valore di libbre 15 $^3/_4$ si ottiene moltiplicando il prezzo 72 $^1/_2$ di una libbra pel numero 15 $^3/_4$. In effetti, è chiaro che il prezzo di 15 libbre si ottiene moltiplicando il prezzo di una libbra per 15, ed il prezzo di $^3/_4$ di libbra si ottiene prendendo i $^3/_4$ del prezzo di una libbra, cioè moltiplicando 72 $^1/_2$ per $^3/_4$; e così il prezzo di libbre 15 $^3/_4$ si otterrà moltiplicando 72 $^1/_2$ per 15 $^3/_4$.

Allorchè si conosce il valore di un certo numero di unità, e si vuol trovare quello di una sola unità, bisogna dividere il valore noto di tutte le unità per il numero di queste unità.

Così p. e. conoscendosi che metri 9 $^1/_4$ di stoffa costano 220 lire, il prezzo di un metro si ottiene dividendo il prezzo 220 di tutti i metri per il numero 9 $^1/_4$ dei metri. Difatti, indicando con x il valore di un unità, e con a il numero dato delle unita, sia intero, sia frazionario; sappiamo che il valore delle a unità sarà $x \times a$; quindi se indichiamo con b questo valore, si avrà $x \times a = b$, e dividendo queste due grandezze eguali per a, verrà $x = \frac{b}{a}$. Ecco dunque dimostrato che il valore di un' unità si ottiene dividendo il valore di tutte le unità pel numero di queste unità.

1. Si sono comprate tre balle di cotone, una di libbre 95 $^1/_2$, l' altra di libbre 120 $^3/_4$, l' altra di libbre 136 $^2/_3$. Si domanda la totalità

del cottone comprato ed il suo prezzo, conoscendosi che quello di una libbra è $^3/_4$ di lira.

II. Un negoziante ha comprato botti 23 $^2/_3$ di olio, al prezzo di lire 720 la botte; ha poi venduto botti 11 $^3/_4$ al prezzo di lire 760 $^1/_2$ l'una, e le rimanenti le ha vendute al prezzo di lire 705. Si domanda se vi è stata perdita o guadagno, ed a che monta la perdita o il guadagno fatto.

III. Si è comprato un cesto di frutta del peso di chilogrammi 35 $^1/_2$ per distribuirsi a 42 persone; e si è pagato lire 6 $^3/_4$. Si domanda il costo di un chilogrammo di frutta, la quota di ciascuna persona, ed il costo di ciascuna quota.

IV. Quanto costano canne 86 $^3/_8$ di stoffa pagata al prezzo di lire 24 $^1/_2$ la canna; e quanti abiti possono farsi con la detta stoffa, richiedendosi canne 5 $^1/_4$ per ciascun abito; e quanto costa ciascun abito?

V. La polvere di cannone è composta di tre quarti del suo peso di salnitro, mezzo quarto di carbone, e mezzo quarto di solfo. Qual peso di ciascuna di queste sostanze entrà in 18 chilogrammi di polvere?

VI. Due fratelli hanno avuto un' eredità di 8000 lire, con condizione che la parte del secondogenito sia tre quarti di quella del primogenito. Quanto tocca a ciascuno?

Siccome la quarta parte del primogenito presa 4 volte, più altri tre quarti della stessa debbono formare l'intera eredità, ne segue che 7 quarti della rata del primogenito fanno 8000 lire; perciò dividendo 8000 per 7 si avrà un quarto della rata del primogenito, da cui si desumono le due rate incognite.

VII. Due fontane scorrono in una vasca: una scorrendo sola riempie la vasca in ore 1 $^1/_4$; l'altra scorrendo anche sola la riempie in ore 3 $^2/_3$. Si domanda in quanto tempo riempiranno la vasca scorrendovi ambedue contemporaneamente.

Conviene trovare in un ora che parte della vasca riempie la prima fontana scorrendo sola, ed in un' ora che parte ne riempie la seconda scorrendo anche sola; poi sommando queste due parti si avrà in un' ora che parte riempiono della vasca le due fontane che vi scorrono simultaneamente; e se p. e. riempieno i 7 dodicesimi della vasca in un' ora, ne riempiranno un dodicesimo in un settimo di ora, e quindi riempiranno l'intera vasca in 12 settimi di ora.

VIII. Posti gli stessi dati del problema precedente, supponiamo che nel fondo della vasca esista un foro per cui uscendo l'acqua, la vasca piena si vuoterebbe in ore 4 $^1/_2$. Si domanda in quanto tempo si riempie la vasca col foro aperto, scorrendo simultaneamente le due fontane.

Qui conviene trovare in un ora che parte della vasca si vuota per l'apertura del foro; e se p. e. questa parte fosse i $^2/_9$ della vasca, e le due fontane che vi scorrono simultaneamente ne riempiono i $^7/_{12}$, col foro aperto ne riempiranno in un' ora $^7/_{12}$ meno $^2/_9$; dopo ciò si procederà come nel precedente esempio.

IX. Una palla elastica risale ai $^3/_4$ dell' altezza da cui è caduta. A quale altezza risalirà dopo aver toccato 3 volte il suolo, essendo la prima volta caduta dall' altezza di metri 2 e $^3/_4$?

X. Una palla elastica, che risale ai $^3/_4$ dell' altezza da cui cadde, dopo aver toccato 4 volte il suolo risale all' altezza di piedi 2 $^1/_3$. Si domanda da quale altezza è caduta la prima volta.

XI. Si è lavorato un campo da 3 coloni. Il terzo ha fatto i $^4/_5$ della fatica del secondo, ed il secondo ha fatto i $^3/_4$ della fatica del primo. Si debbono poi dividere la ricolta, che è stata di ettolitri 82 $^1/_2$. Quanto tocca a ciascuno?

È chiaro che la parte del secondo deve essere i $^3/_4$ di quella del primo, e la parte del terzo i $^4/_5$ di quella del secondo; perciò la parte del terzo rispetto a quella del primo sarà i $^4/_5$ dei $^3/_4$, ossia i 12 ventesimi, ossia i 3 quinti. Dunque il secondo ed il terzo avranno insieme i 3 quarti più i 3 quinti della parte del primo, che sommate fanno 1 27 ventesimi della parte del primo. Perciò $^{27}/_{20}$ della rata del primo più la rata stessa del primo debbono formare l' intero ricolto; ma la rata del primo è $^{20}/_{20}$ di sè stessa, dunque $^{27}/_{20} + ^{20}/_{20}$ della rata del primo fanno l' intero ricolto; perciò il ricolto è $^{47}/_{20}$ della rata del primo; quindi dividendo 82 $^1/_2$ per 47 si avrà un ventesimo della rata del primo colono, da cui si desumono le tre rate incognite.

CAP. V.

NUMERI DECIMALI.

MANIERA DI SCRIVERE E DI LEGGERE I DECIMALI.

187. Della stessa guisa che per rappresentare un numero più grande dell' unità abbiamo diviso il numero in diversi ordini di unità di 10 in 10 volte maggiori, così per rappresentare un numero più picciolo dell' unità possiamo concepir divisa questa unità in parti che sieno di 10 in 10 volte minori, cioè possiamo concepirla divisa in 10 *decimi*, ed un decimo in dieci parti più picciole che sono i *centesimi*, ed il centesimo in 10 più picciole che sono i *millesimi*, e similmente procedendo.

Le parti decimali dell' unità sono comodissime per misurere una grandezza minore dell' unità; perchè questa grandezza deve essere eguale ad un certo numero di decimi, più un certo numero di centesimi, più un certo numero di millesimi, ec.; e, se quando siamo giunti a' millesimi, resta una parte minore di un millesimo, e non si curasse dividere questa parte in diecimilesimi, e poi in centomilesimi, ec., la gran-

dezza da misurarsi verrà espressa in decimi, centesimi, e millesimi, e si differisce dalla sua vera misura per meno di un millesimo.

Si chiama *numero decimale*, ed anche *frazione decimale* un numero che esprime parti decime, centesime, millesime, ec. dell' unità, cioè parti indicate da numeri le cui cifre sono l' unità seguita da' zeri.

Dunque: un numero decimale si decompone in diversi ordini di unità, le quali sono di 10 in 10 volte più picciole.

Questi ordini, cominciando da quello dei decimi, sono: *ordine dei decimi, ordine dei centesimi, ordine dei millesimi, ordine dei diecimilesimi, ordine dei centomilesimi, ordine dei milionesimi, ec.*

Si chiama *denominatore* di un numero decimale, quel numero che indica le unità del suo infimo ordine.

Un numero decimale può scriversi della stessa guisa che un numero intero, mettendo la cifra che rappresenta i decimi a dritta di quella che dinota la unità, e la cifra che dinota i centesimi a dritta di quella che dinota i decimi, e la cifra che dinota i millesimi a dritta di quella de' centesimi e così di seguito; ponendo un zero in quel posto dove mancano le unità di qualche ordine, ed una virgola a dritta della cifra delle unità semplici, per distinguere il posto dove stanno queste unità, ossia dove finisce la *parte intera* e comincia la *parte decimale*. Se poi un numero non contiene parte intera, in sua vece si mette un zero.

Le cifre di un numero decimale, che sono a dritta della virgola diconsi *cifre decimali*.

Ciascuna cifra poi rappresenta *decimi, centesimi, millesimi*, ec. secondo che occupa il primo, il secondo, il terzo posto, ec. a dritta della cifra delle unità semplici, o della virgola.

Abbiasi p. e. un numero che contenga 94 unità, più 7 decimi, più 3 centesimi, più 8 millesimi; esso si scriverà mettendo una virgola a dritta della cifra 4 delle unità, ed a dritta della virgola si porranno, l' una di seguito all' altra, le cifre dei decimi, dei centesimi, e dei millesimi, che sono 7, 3, 8; si avrà così il numero 94,738 che si leggerà *94738 millesimi*; perchè la prima cifra a dritta rappresenta millesimi, e le altre procedendo verso sinistra, rappresentano unità di 10 in 10 volte più grandi della stessa guisa che in un numero intero.

Parimente un numero che non contiene parte intera, p. e.

5 decimi, 8 centesimi, *zero* millesimi, e 9 diecimilesimi, si scriverà così, 0,5809; e si leggerà *5809 diecimilesimi*, ovvero *zero unità, e 5809 diecimilesimi*. Similmente il numero che contiene 8 millesimi e 6 diecimilesimi, senza avere nè parte intera, nè decimi, nè centesimi, si scriverà così, 0,0086; e si leggerà: *86 diecimilesimi*, ovvero, *zero unità, ed 86 diecimilesimi*.

Ma la maniera ordinaria di enunciare, e di leggere i numeri decimali, si è di enunciare e di leggere separatamente la parte intera e la parte decimale; perciò il numero proposto si leggerà: *94 unità e 738 millesimi*.

Quando il numero tiene molte cifre decimali, sogliono leggersi le sue cifre a due a due, o a tre a tre. Così p. e. nel numero decimale 364,952730567884; leggendo le sue cifre a tre a tre, si dirà: *364 unità, 952 millesimi, 730 milionesimi, 567 bilionesimi, 84 centobilionesimi* (*).

Viceversa: un numero esprimente parti decimali che è scritto senza la virgola, si può scrivere con la virgola separando tante cifre decimali dalla sua dritta quanti zeri tiene il denominatore. Così p. e. i numeri 853 centesimi, 24 millesimi, si scrivono con la virgola nel seguente modo 8,53. 0,024, e si leggono: *8 unità e 53 centesimi, zero unità e 24 millesimi*.

188. Riassumiamo ora la REGOLA per scrivere un decimale. *Si scriverà prima la parte intera, e se manca, si scrive un zero, indi si pone una virgola, e poi si scrive la parte decimale in modo che abbia tante cifre quante sono i zeri del denominatore, supplendo zeri, se occorre, fra essa e la virgola.*

189. Avendo veduto che i numeri decimali si possono leggere in due modi, cioè pronunciando la parte intera e la parte decimale separatamente, ovvero leggendo congiuntamente la parte intera e la decimale come se la virgola non vi fosse, ed enunciando infine le unità dell'ordine rappresentato dall'ultima cifra a dritta; ne segue che un numero decimale letto nel primo modo equivale ad un intero più una frazione che ha per numeratore le cifre a dritta della virgola, e per

---

(*) Secondo l'antica nomenclatura usata in Italia si leggerà: *364 unità, 952 millesimi, 730 milionesimi, 567 millemilionesimi, 84 centomilamilionesimi*.

denominatore l'unità seguita da tanti zeri quante sono queste cifre; e letto nel secondo modo equivale ad un numero frazionario che ha per numeratore l'intero che risulta sopprimendo la virgola dal decimale, e per denominatore l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali.

Così p. e. i numeri decimali 2,7, 35,028, 129,2074 equivalgono a $2\frac{7}{10}$, a $35\frac{28}{1000}$, ed a $129\frac{2074}{10000}$, ovvero ai numeri $\frac{27}{10}$, $\frac{35028}{1000}$, e $\frac{1292074}{10000}$. Ed i numeri 0,8, 0,43, 0,0052, che non hanno parte intera, equivalgono alle frazioni ordinarie $\frac{8}{10}$, $\frac{43}{100}$, e $\frac{52}{10000}$.

190. Allorchè un intero si vuole convertire in numero frazionario decimale, questo può scriversi senza denominatore, mettendo la virgola affianco l'intero, e tanti zeri a dritta di essa quanti ne ha il denominatore.

Così p. e. 83 volendosi convertire in 10000^{mi}, verrà eguale ad $\frac{830000}{10000}$; ma possiamo scriverlo senza denominatore così, 83,0000, leggendosi, *830 mila diecimilesimi.*

PROPRIETA' DE' NUMERI DECIMALI.

191. *Un numero decimale si moltiplica, o divide per 10, 100, 1000, ec. trasferendo la virgola di uno, due, tre, ec. posti verso dritta, o verso sinistra.*

Sia il numero 25,479. Trasferendo primieramente la virgola di un posto verso dritta, esso diviene 254,79 che è 10 volte maggiore del proposto.

Dim. Difatti, col trasferirsi la virgola di un posto verso dritta, la cifra 9 che dinotava millesimi denota centesimi, che sono unità 10 volte più grandi; e la cifra 7 che dinotava centesimi denota decimi, che sono unità dieci volte più grandi dei centesimi; lo stesso può dirsi delle altre cifre; così tutte le parti del numero proposto essendo divenute 10 volte maggiori, il detto numero si sarà moltiplicato per 10.

Similmente si dimostra che se la virgola si trasferisce di

due, tre, ec. posti verso dritta, il numero si moltiplica per 100, 1000, ec.

193. *Un numero decimale non cambia valore se si aggiungono o si tolgono quanti zeri si vogliono alla sua dritta.*

Sia p. e. il numero decimale 74,683. Se aggiungiamo due zeri alla sua dritta esso diviene 74,68300, e conserva lo stesso valore.

Perchè, il numeratore ed il denominatore della parte fratta vengono a moltiplicarsi per lo stesso numero che in questo caso è 100; difatti, prima la parte fratta era $\frac{683}{1000}$, ed ora è $\frac{68300}{100000}$. Se poi si sopprimessero zeri dalla dritta di un decimale, allora i termini della parte fratta vengono a dividersi per lo stesso numero, perciò non cambia valore.

Si può anche dire che le cifre decimali esprimono un numero di parti 100 volte maggiore, ma queste parti hanno un valore 100 volte minore, perchè prima erano millesimi, ed ora sono centomilesimi, e perciò non ha cambiato valore.

Potrebbe dirsi altresì che non cambia valore, perchè contiene gli stessi decimi, centesimi, e millesimi che prima conteneva, cioè 6 decimi, 8 centesimi, e 3 millesimi.

194. *Se si disprezzano quante cifre si vogliano a dritta di un decimale, la parte disprezzata è sempre minore di un' unità dell' infimo ordine della parte che resta.*

Sia p. e. il numero decimale 0,84999. Disprezzando tre cifre decimali alla sua dritta, resta il numero 0,84: ora io dico che la parte disprezzata 0,00999 è minore di un' unità dell' infimo ordine della parte che resta, cioè è minore di 1 centesimo.

Dim. Difatti nel caso più sfavorevole in cui le cifre disprezzate fossero tutte 9, come è il nostro, bisogna aggiungere al numero 0,00999 da esse rappresentato un' unità del suo infimo ordine, cioè 1 centomilesimo per avere 1 centesimo, perciò essa è minore di un centesimo, cioè è minore di una unità dell' infimo ordine della parte che resta.

Questa verità è comune a' decimali ed agl' interi; perchè gli uni e gli altri si decompongono in diversi ordini di unità che sono di 10 in 10 volte più grandi procedendo da dritta verso sinistra. Ma era qui il luogo di farne parola, per l' importanza che fra poco comincerà ad avere nei numeri approssimati, i quali sempre si esprimono in decimali.

ADDIZIONE DE' NUMERI DECIMALI.

195. *Si scrivono i numeri dati l' uno sotto l'altro, in modo che le unità cadano sotto le unità, i decimi sotto i decimi, i centesimi sotto i centesimi, ec.; e poi si addizionano come gli interi, ponendo la virgola nel risultato a sinistra della cifra dei decimi.*

Sieno da addizionarsi i seguenti numeri decimali 5937,029, 236,5087, 22,09, 0,5876.

Scriveremo questi numeri l' uno sotto l' altro in modo che le unità dello stess' ordine corrispondano in una medesima colonna, come si scorge qui affianco. Poi si comincia l' addizione dalla prima colonna a dritta, e si dirà: 7 diecimilesimi più 6 diecimilesimi fanno 13 diecimilesimi; ma poichè 13 diecimilesimi formano 1 millesimo e 3 diecimilesimi, i 3 diecimilesimi si scrivono al di sotto nel posto dei diecimilesimi, ed il millesimo si ritiene per unirlo alla colonna dei millesimi. Poi si passa ad addizionare i numeri della colonna de' millesimi, e si dirà: un millesimo che si porta, più 9 fanno 10, più 8 fanno 18, più 7 fanno 25 millesimi; ma poichè 25 millesimi fanno 2 centesimi e 5 millesimi, i 5 millesimi si scrivono al di sotto nella colonna dei millesimi, e i 2 centesimi si ritengono per unirli alla colonna de' centesimi. Poi si passa ad addizionare la colonna dei centesimi operando similmente, e similmente si prosegue sino all' addizione dell' ultima colonna. In tal modo si troverà per somma il numero 6196,2153.

$$\begin{array}{r} 5937,029 \\ 236,5087 \\ 22,09 \\ 0,5876 \\ \hline 6196,2153 \end{array}$$

SOTTRAZIONE DE' NUMERI DECIMALI.

196. *Si scrive il numero minore sotto al maggiore, in modo che le cifre decimali dello stess' ordine sieno situate l' una sotto l' altra; poi si esegue la sottrazione come si fa per gli interi, ponendo la virgola nel risultato a sinistra della cifra dei decimi.*

Se il numero maggiore avesse meno cifre decimali del minore, si aggiungeranno tanti zeri a dritta del primo finchè le sue cifre decimali pareggino quelle del secondo.

Sia p. e. il numero decimale 975,239 da cui debba togliersi l' altro 96,482.

Scriviamo il minore sotto al maggiore in modo che le unità dello stess' ordine sieno situate l' una sotto l' altra, come qui affianco si vede; eseguiamo poi la sottrazione come si fa per i numeri interi; cioè, si cominceranno a togliere i millesimi del numero minore da quelli del maggiore, e si dirà: da 9 tolto 2 resta 7, che si scrive al di sotto; poi si passa a togliere la cifra 8 dei centesimi dalla cifra 3, e si dirà da 3 tolto 8 non si può; perciò la cifra 3 si farà imprestare 1 decimo dalla cifra 2 dei decimi, il quale ridotto in centesimi, ed aggiunto al 3 centesimi, fa 13 centesimi; quindi si dirà: da 13 tolto 8 resta 5, che si scrive al di sotto. Similmente si prosegue innanzi; e si troverà per resto il numero 878,757.

975,239
96,482
878,757

197. Sia per secondo esempio da sottrarsi il numero 57,9832 dal numero 86,25. Qui il numero minore avendo più cifre decimali del maggiore, si pareggiano queste cifre aggiungendo zeri a dritta del maggiore, e con ciò sappiamo che il numero non cambia valore. Poi si esegue la sottrazione come si vede qui affianco, e si ottiene per resto il numero 28,2668.

86,2500
57,9832
28,2668

198. Sia per terzo esempio da togliersi il numero decimale 0,583 dall' intero 24. Scriveremo l' intero con la virgola a dritta, e con tanti zeri dopo la virgola quante sono le cifre decimali del numero minore, così l' intero non cambia valore; poi si esegue la sottrazione come si vede qui affianco, e si ottiene per resto 23,417.

24,000
0,583
23,417

MOLTIPLICAZIONE DEI DECIMALI.

199. ***Due decimali si moltiplicano fra loro come se fossero interi, non tenendo conto della virgola: e dopo si separeranno dalla dritta del prodotto tante cifre decimali quante ne hanno i due fattori.***

Sia da moltiplicarsi il decimale 8,395 per l' altro 3,21.

Eseguendo la moltiplicazione come se fossero interi, facendo astrazione dalla virgola, si avrà per prodotto 2694795; e separando cinque cifre decimali dalla dritta, cioè quante ne

sono nei due fattori, si otterrà il prodotto cercato, che sarà 26,94795.

In effetti, il moltiplicando essendo eguale a 8395 millesimi (n.° 189), se moltiplichiamo questo numero di millesimi pel moltiplicatore considerato come intero, cioè per 321, il prodotto 2694795 esprimerà anche millesimi; quindi, per indicare che esprime millesimi, conviene separare tre cifre decimali dalla sua dritta, ed il prodotto sarà 2694,795. Ma questo prodotto è 100 volte maggiore del vero, perchè si è fatta la moltiplicazione pel moltiplicatore considerato come intero, cioè per un numero 100 volte maggiore; quindi, per avere il prodotto vero, quello ottenuto deve dividersi per 100, e perciò dobbiamo trasferire la virgola di due altri posti verso sinistra. Dunque, in tutto, bisogna separare dalla dritta del prodotto tante cifre decimali quante ne sono nei due fattori, e così si avrà il prodotto cercato che sarà 26,94795.

La stessa cosa può dimostrarsi nel seguente modo.

Scrivendo i numeri proposti sotto forma di frazioni ordinarie, l'operazione si riduce a moltiplicare $\frac{8395}{1000}$ per $\frac{321}{100}$, e lasciando accennata la moltiplicazione dei numeratori, il prodotto sarà $\frac{8395 \times 321}{100000}$; quindi si ottiene moltiplicando i numeri proposti come se fossero interi, e dividendo il prodotto per l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali dei due fattori; il che equivale a separare dal prodotto tante cifre decimali quante ne contengono i due fattori.

Ecco per esercizio altri due esempi.

Sia 53,002 da moltiplicarsi per 0,0013. L'operazione si riduce a moltiplicare 53002 per 13, e poi dal prodotto 69026 si separeranno sette decimali supplendo con un zero la cifra che manca; perciò il prodotto sarà 0,069026.

Sia a moltiplicarsi 0,047 per 0,012. L'operazione si riduce a moltiplicare 47 per 12, e dopo dal prodotto 564 si separeranno sei decimali supplendo con zeri le tre cifre mancanti, e si avrà per prodotto 0,000564.

DIVISIONE DI UN NUMERO DECIMALE PER UN NUMERO INTERO.

200. *Un decimale si divide per un intero non tenendo conto della virgola, ed eseguendo la divisione come si fa per gl'interi; ma poi si distaccheranno dal quoziente tante cifre decimali quante ne contiene il dividendo.*

Sia il numero 97,82 da dividersi per l'intero 78. Eseguiamo la divisione come si fa per gl' interi, e come se la virgola non esistesse nel dividendo, e si avrà per quoziente 125 più $\frac{32}{78}$: e separando due cifre decimali dalla parte intera del qnoziente, esso diverrà 1,25 più $\frac{32}{78}$ *di un centesimo.*

In effetti, il dividendo equivale a 9782 centesimi, quindi diviso per l'intero 78 il quoziente esprimerà pure centesimi: perciò per indicare che esprime centesimi debbonsi distaccare due cifre decimali dalla sua dritta, e quindi viene eguale a 1,25. Ma poichè nella divisione sono rimasti 32 centesimi da dividersi per 78, che fanno $\frac{32}{78}$ di $\frac{1}{100}$, se si aggiunge questa frazione *complementale* al quoziente ottenuto, si avrà il quoziente totale, che sarà 1,25 più $\frac{32}{78}$ *di un centesimo.*-Trascurando questa frazione, il quoziente 1,25 differisce dal vero per meno di un *centesimo*, e si dice che *è approssimato a meno di un centesimo.*

201. Allorchè facendo astrazione dalla virgola nel dividendo ne risulta un numero minore del divisore, il quoziente non può contenere parti dell' unità rappresentate dal dividendo. Così p. e. volendosi dividere 1,36 per 423, il dividendo essendo eguale a 136 centesimi, e dovendo dividersi per 423 che è maggiore di 136, il quoziente non può contenere centesimi; ma se si volesse espresso in parti decimali di ordine inferiore ai centesimi bisognerebbe aggiungere zeri a dritta del dividendo riducendolo in parti decimali di quell'ordine che si desidera, e poi si dividerà pel divisore. Per tal modo, se il quoziente p. e. si vuole espresso in 10000^{mi}, si aggiungono due zeri a dritta del dividendo, e ne verrà il numero 1,3600 che diviso pel divisore dà per quoziente 0,0032 più $\frac{64}{423}$ di un diecimilesimo.

Disprezzando la frazione complementale, si avrà il quoziente desiderato eguale a 0,0032 che differisce dal vero per la frazione disprezzata, cioè per meno di un diecimilesimo dell' unità.

Se non si volesse esprimere il quoziente in parti decimali dell'unità, si otterrebbe scrivendo il dividendo sotto forma di frazione ordinaria, e dividendo questa frazione pel divisore; perciò viene eguale a $\frac{136}{100} : 423 = \frac{136}{42300}$.

202. Siccome ordinariamente si ha bisogno di esprimere il quoziente in parti decimali di un certo ordine; perciò nella divisione di un decimale per un intero conviene ridurre il dividendo in parti decimali di quest' ordine, aggiungendo un conveniente numero di zeri alla sua dritta, ovvero trascurando le cifre di ordine inferiore, se ve ne fossero, e poi si dividerà pel divisore, ricordando che bisognerà separare dal quoziente tante cifre decimali quante sono divenute quelle del dividendo.

Così p. e. volendo dividersi 70,23 per 56, e desiderandosi il quoziente espresso in 10000*mi* si convertirà il dividendo in 10000*mi* aggiungendo due zeri alla sua dritta, e verrà eguale a 70,2300, che diviso per 56, dà per quoziente 1,2541 più $\frac{4}{56}$ *di un diecimilesimo*; e disprezzando la frazione complementale, il quoziente cercato espresso in 10000*mi* sarà 1,2541 che differisce dal vero per meno di un diecimilesimo dell' unità.

Sia ora da dividersi 583,02941 per 317, richiedendosi il quoziente espresso in centesimi. Si eseguirà la divisione arrestandola dopo abbassata la cifra 2 dei centesimi, trascurando le altre tre a dritta, e si otterrà per quoziente 1,83 approssimato a meno di un centesimo.

203. Si può proporre a dividere un intero per un intero, richiedendosi il quoziente espresso in parti decimali dell' unità. In tal caso si ridurrà il dividendo in decimale aggiungendo tanti zeri alla dritta quante cifre decimali si vogliono nel quoziente; e poi si esegue la divisione, ed infine si separano dal quoziente tante cifre decimali quanti sono stati i zeri aggiunti.

Così volendo dividere 34 per 526, esigendosi il quoziente espresso in centesimi, si aggiungeranno due zeri a dritta del dividendo, e verrà eguale a 3400 centesimi; poi si dividerà pel divisore, ed il quoziente 6 esprimerà centesimi; quindi si separano due cifre decimali dalla sua dritta, e viene eguale a 0,06, con un errore minore di un centesimo.

Divisione di un decimale per un decimale.

204. *Si rende il divisore intero supprimendo la virgola, e nel dividendo si trasferisce la virgola verso dritta di tanti posti quante sono le cifre decimali del divisore, e poi si esegue la divisione*

che si riduce a quella di un decimale per un intero o di un intero per un intero (*).

Sia da dividersi 83,0242 per 7,56.

Supprimiamo la virgola nel divisore, ed esso si moltiplica per 100, perchè ha due cifre decimali, e viene eguale a 756; ma affinchè il quoziente non cambiasse, moltiplichiamo anche il dividendo per 100 trasferendo la virgola di due posti verso dritta, e viene eguale a 8302,42; poi eseguiamo la divisione, che si riduce a quella di un decimale per un intero, e si avrà per quoziente 10,98 approssimato a meno di un centesimo, perchè restano 154 *centesimi* da dividersi per 756, che danno la frazione $\frac{154}{756}$ di un centesimo, che abbiamo trascurata.

Divisione di un intero per un decimale.

205. La divisione di un intero per un decimale va compresa nel caso precedente, perchè l'intero si può scrivere con la virgola alla dritta, e quanti zeri si vogliono dopo la virgola. E però la regola di tale divisione è la seguente.

Un intero si divide per un decimale rendendo il divisore intero sopprimendo la virgola, e si aggiungono a dritta del dividendo tanti zeri quante cifre decimali ha il divisore; poi si esegue la divisione che si riduce a quella di un intero per un intero.

Sia p. es. da dividersi 35 pel decimale 9,034.

Operando come abbiamo detto, si riduce a dividere 35000 per 9034, e si ottiene per quoziente $3\,\frac{7798}{9034}$. Se il quoziente si volesse in decimali p.es. in 1000^{mi}, bisognerà porre altri tre zeri a dritta del dividendo, e viene eguale a 35000,000, che diviso per 9034, dà per quoziente 3,874, differente dal vero per meno di un millesimo.

ESERCIZII DI CALCOLO DI FRAZIONI ORDINARIE E DECIMALI

206. Allorchè si debbono calcolare numeri decimali e frazioni ordinarie fra loro, si possono scrivere i numeri decimali sotto forma di frazioni ordinarie come si disse nel n° 189, e poi si eseguono le operazioni con le regole delle frazioni ordinarie, e l'ultimo risultato che si ottiene si riduce in decimale, qualora si volesse così espresso. Così

(*) Si può anche dare la seguente regola per la divisione dei decimali.

Si esegue la divisione come si fa per gl'interi non tenendo conto della virgola, e poi dal quoziente si separano tante cifre decimali quante il dividendo ne ha dippiù del divisore; e se ne ha meno, si pareggiano le cifre decimali aggiungendo zeri a dritta del dividendo, e poi si esegue la divisione, che si riduce a quella di un intero per un intero.

Ma la ragione di questa regola riesce un poco stentata, e non facilissima come quella della regola scritta di sopra.

p.e.se si avesse ad eseguire il calcolo indicato nella seguente formola.

$$\frac{8\,\frac{1}{5}\times\left(7\,\frac{2}{3}-2\,\frac{3}{4}\right)\times 6,07}{0,45\times\left(8\,\frac{4}{7}-0,21\right)\times\frac{5}{9}}.$$

Questa espressione dinota una divisione il cui dividendo è tutto ciò che sta scritto sulla linea principale di frazione, ed il divisore è tutto ciò che stà sotto la medesima linea; ma il dividendo che è un prodotto di tre fattori, uno dei quali è una differenza accennata chiusa nella parentesi, bisogna che si riduca da un sol numero frazionario, e lo stesso deve farsi nel divisore; e dopo si dividerà il primo numero frazionario pel secondo, e si avrà così il valore espresso dalla formola data.

Per maggior chiarezza indichiamo le operazioni da farsi:

$$7\,\frac{3}{3}-2\,\frac{3}{4}=4\,\frac{11}{12},\quad 8\,\frac{4}{7}-0,21=8\,\frac{4}{7}-\frac{21}{100}=8\,\frac{253}{700},$$

$$8\,\frac{1}{5}\times\left(7\,\frac{2}{3}-2\,\frac{3}{4}\right)\times 6,07=\frac{41}{5}\times\frac{59}{12}\times\frac{607}{100},$$

$$0,45\times\left(8\,\frac{4}{7}-0,21\right)\times\frac{5}{9}=\frac{9}{20}\times\frac{5853}{700}\times\frac{5}{9}.$$

Si dovrebbe eseguire il prodotto dei tre fattori del numeratore e quello dei tre fattori del denominatore, e poi dividere il primo prodotto pel secondo: ma è più agevole (n° 172) lasciar accennata la moltiplicazione del dividendo per il divisore capovolto, perciò la formola data si riduce a $\frac{41\times 59\times 607\times 20\times 700\times 9}{5\times 12\times 100\times 9\times 5853\times 5}=\frac{41\times 59\times 4\times 7}{5853}$

$=\frac{67732}{5853}=11\,\frac{3349}{5853}=11,57$, valore approssimato a meno di $\frac{1}{100}$.

207. Allorchè debbono calcolarsi fra loro frazioni ordinarie e decimali si può operare senza scrivere le frazioni decimali sotto forma di frazioni ordinarie, come passiamo a fare nei seguenti n.[i]

208. Sieno da addizionarsi i numeri $9\,\frac{5}{7}$, 3,45, $\frac{2}{3}$, 0,18, $\frac{1}{4}$.

Addizioniamo gl' interi ed i decimali, e si avrà per somma 12,63. Addizioniamo poi le frazioni ordinarie, e si avrà per somma $1\,\frac{25}{84}$; e volendo il risultato espresso in millesimi ridurremo la frazione $\frac{25}{84}$ in millesimi, e viene eguale a 0,297; dunque la somma delle frazioni ordinarie espressa in millesimi è uguale a 1,297. Addizioniamo infine questa somma con l'altra 12,63, e si avrà la somma cercata, che sarà 13,927.

209. Sia da togliersi $36\,\frac{7}{12}$ da 52, 084, richiedendosi il risultato in centesimi. Ridurremo prima la frazione ordinaria in centesimi, e viene

eguale a 0,58: indi toglleremo 36,58 da 52,08 trascurando la cifra 4 del millesimi, e si avrà per resto 15,50 approssimato sino ai centesimi. Difatti nel risultato manca la differenza fra le rimanenti parti trascurate dei due numeri, ma ciascuna di queste parti essendo minore di 0,01, con più ragione la loro differenza è minore di un centesimo; perciò il risultato è approssimato a meno di 0,01.

210. Se dovesse moltiplicarsi una frazione ordinaria per un numero decimale, si moltiplica il numeratore della frazione ordinaria pel numero decimale, ed il prodotto si divide pel denominatore della frazione.

Così p. e. dovendosi moltiplicare la frazione $\frac{35}{48}$ per 9,21; il prodotto sarà $\frac{359,\times 21}{48} = \frac{322,35}{48}$, che espresso in millesimi, viene eguale a 6,715.

210. Se dovesse dividersi un numero decimale per una frazione ordinaria, si pratica come se un intero dovesse dividersi per una frazione, cioè si moltiplica il decimale per la frazione ordinaria capovolta; e poi il numeratore del risultato, che sarà un decimale, si dividerà pel denominatore che è un intero.

Così, per esempio, dovendosi dividere 52,03 per $\frac{12}{43}$, il quoziente sarà $\frac{52,03\times 13}{12} = \frac{676,39}{12}$; e volendolo approssimato sino a 100^{mi}, viene eguale a 56,36.

211. Se dovesse dividersi una frazione ordinaria per un decimale, si moltiplica il denominatore della frazione pel decimale, ed il numeratore si divide pel prodotto ottenuto.

Così per esempio volendosi dividere $\frac{15}{16}$ per 5,8, il quoziente sarà $\frac{15}{16\times 5,8} = \frac{15}{92,8}$; ed approssimandolo sino ai millesimi viene eguale a 0,161.

Riduzione di una frazione ordinaria in decimale.

212. Occorrendo spessso ridurre una frazione ordinaria in decimale ne diamo qui una regola a parte sebbene nel n.° 155 avessimo tratto in generale della riduzione di una frazione in un' altra di diverso denominatore, e nel n.° 203 avessimo parlato della divisione di un intero per un intero, esprimendo il quoziente in parti decimali dell'unità.

Si divide il numeratore pel denominatore aggiungendo a dritta del dividendo tanti zeri quante cifre decimali si vogliono nella frazione decimale; e dopo si separano dal quoziente le cifre decimali richieste.

Siccome ogni frazione equivale al quoziente che si ottiene dividendo il numeratore pel denominatore, la frazione proposta è uguale a 5 diviso per 7, e volendo il quoziente in millesimi ridurremo il numeratore in millesimi aggiungendo tre zeri alla sua dritta, così viene eguale a 5000 millesimi; dopo ciò lo dividiamo pel denominatore, ed avremo per quoziente 714 millesimi più $\frac{3}{7}$ di un millesimo; quindi per indicare che esprime millesimi conviene separare tre cifre decimali dalla sua dritta; ecco perchè la frazione ordinaria viene eguale a 0,714 non esattamente, ma ne differisce per meno di un millesimo, e propriamente per $\frac{3}{7}$ di un millesimo.

CONDIZIONI PERCHÈ UNA FRAZIONE ORDINARIA SIA RIDUCIBILE ESATTAMENTE IN DECIMALE.

213. *Una frazione ordinaria irrudicibile si converte esattamente in decimale se i fattori primi del denominatore sono solamente 2 e 5.*

In effetti, il denominatore dovendo dividere esattamente il prodotto del numeratore per una potenza di 10, ed essendo primo col numeratore che è un fattore del prodotto, deve dividere l'altro fattore che è una potenza di 10; perciò deve contenere i soli fattori di questa potenza che sono 2 e 5.

I zeri da aggiungersi a dritta del numeratore affinchè la divisione riesca esatta debbono essere tanti quante unità sono nel massimo esponente che il fattore 2 o 5 ha nel denominatore: perchè nel numeratore con i zeri a dritta che fa da dividendo debbono esservi i fattori 2 e 5 con un esponente che non sia minore di quello che questi fattori hanno nel divisore, ossia nel denominatore.

Così p. e., se nel denominatore il fattore 5 ha il massimo esponente, e questo è 4, nel numeratore deve esserci 5^4 affinchè la divisione riesca esatta, perciò deve moltiplicarsi per 10^4 per potersi dividere esattamente pel denominatore; e quindi le cifre decimali della frazione equivalente alla proposta saranno quattro.

Se poi il denominatore di una frazione ordinaria non è divisi-

bile nè per 2 nè per 5, essa non potrà mai ridursi in decimale.

Dunque per vedere se una frazione ordinaria che ha nel denominatore i fattori 2 e 5 ed altri fattori sia convertibile esattamente in decimale, bisogna prima renderla irriducibile; e dopo ciò, se si sopprimono nel denominatore i fattori diversi da 2 e da 5, essa sarà convertibile esattamente in decimale.

Senza ricorrere al massimo comun divisore per renderla irriducibile si può scomporre il denominatore in due fattori uno dei quali sia formato dai soli fattori 2 e 5, e l'altro sia il quoziente che si ottiene dopo aver diviso il denominatore quante volte si può per 2 e per 5; e se la frazione è riducibile esattamente in decimale, il detto quoziente dovrà dividere il numeratore, perchè solo in tal caso si converte in un'altra che ha nel denominatore i soli fattori 2 e 5.

FRAZIONI DECIMALI PERIODICHE.

214. Una frazione decimale di un numero illimitato di cifre, in cui da un certo posto in poi si ripete sempre lo stesso numero di cifre con lo stesso ordine disposte si dice *periodica;* e l'insieme delle cifre che si ripetono si dice *periodo.*

Se il periodo comincia dalla prima cifra decimale la frazione si dice *periodica semplice ;* se non comincia dalla prima cifra decimale si dice *periodica mista.* Quando è periodica mista le cifre decimali che precedono il periodo diconsi *cifre irregolari,* e formano la parte non periodica.

Così, per esempio, le frazioni illimitate 0,253253253..., e 0,0714141414... sono periodiche; e la prima è *periodica semplice*, perchè il periodo 253, che è di tre cifre, comincia dalla prima cifra decimale; la seconda è *periodica mista,* perchè il periodo 14, che è di due cifre, comincia dalla terza cifra decimale.

215. Le frazioni ordinarie che non possono convertirsi esattamente in decimali si riducono in decimali periodiche; perchè nelle divisioni che si fanno per ridurle in decimali, i resti essendo sempre minori del divisore, non vi possono essere al più che tanti resti differenti quante unità meno una tiene il divisore, ossia il denominatore; perciò, allorchè si è giunto ad uno dei resti precedenti, debbono ritornare nel quoziente le stesse cifre che eransi avute da quel resto in poi.

Dunque le divisioni da farsi per ricomparire le cifre del periodo saranno al massimo tante quante unità sono nel de-

nominatore, il che avviene quando vi sono tanti resti diversi quante unità meno una sono nel divisore.

Così p. e. la frazione $\frac{3}{7}$ non potendosi convertire in decimale, perchè il denominatore è un numero primo diverso da 2 e da 5, si *svolge* in decimale periodica semplice, eguale a 0,428571 428571... Difatti nella settima divisione il dividendo essendo eguale a quello della prima divisione, torneranno ad aversi periodicamente le stesse sei cifre nel quoziente.

Così pure la frazione irriducibile $\frac{26}{825}$ non potendosi convertire esattamente in decimale, perchè i fattori del denominatore non sono tutti eguali a 2 ed a 5, essa si trasforma in decimale periodica, eguale a 0,031515..., il cui periodo comincia dalla terza cifra decimale. In effetti, nella quarta divisione il dividendo 125 essendo eguale a quello della seconda divisione, torneranno ad aversi periodicamente nel quoziente le stesse cifre 7 e 5, che si sono avute dalla seconda in poi.

216. La frazione ordinaria da cui deriva una frazione decimale periodica si chiama *frazione generatrice* della decimale. La frazione generatrice di una decimale periodica è il *limite* a cui la decimale si approssima, a misura che si considerano più cifre della frazione decimale: chiamandosi *limite* di una quantità variabile un'altra quantità a cui la variabile si avvicina incessantemente, in modo da differirne per una grandezza minore di qualunque data.

217. Vi sono alcune frazioni ordinarie rispetto a cui è facile vedere quali sieno le decimali periodiche in che esse si sviluppano. Queste sono le frazioni che hanno per numeratore una cifra e per denominatore la cifra 9 scritta una o più volte.

In effetti, si vede che le frazioni $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$, sino a $\frac{9}{9}$ si sviluppano rispettivamente nelle periodiche 0,111..., 0,222..., 0,333..., ec. e 0,9999.

E le frazioni $\frac{1}{99}$, $\frac{2}{99}$, $\frac{3}{99}$,... $\frac{9}{99}$ si sviluppano nelle decimali periodiche 0,010101..., 0,020202..., 0,030303..., ec.

Così pure le frazioni $\frac{1}{999}$, $\frac{2}{999}$, $\frac{3}{999}$, ec. si sviluppano

nelle periodiche 0,001001001..., 0,002 0,002002..., 0,003003003..., ec.

Le frazioni $\frac{9}{9}$, $\frac{9}{99}$, $\frac{9}{999}$, ec. essendo eguali alle frazioni $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{111}$, ne segue che queste frazioni sono i limiti delle periodiche 0,999..., 0,0909..., 0,009009..., ec. Dunque l' unità è il limite della frazione decimale periodica 0,999...

Essendosi dimostrato che $1=0,999...$, sarà $0,1=0,0999...$, $0,01=0,00999...$, $0,001=0,000999...$, ec.

Da ciò segue che ogni frazione, anche se fosse convertibile esattamente in decimale, può essere rappresentata da una frazione decimale periodica. In effetti, la frazione decimale esatta 0,236 essendo eguale a $0,235+0,001$, ponendo invece di 0,001 la sua espressione periodica 0,000999, verrà $0,236=0,23599999$.

Dunque: *una frazione decimale finita equivale alla periodica che si ottiene diminuendo la cifra a dritta di un' unità, e facendola seguire dalla cifra 9 ripetuta un numero illimitato di volte.*

218. *La frazione generatrice di una decimale periodica semplice equivale alla frazione ordinaria che ha per numeratore il periodo, e per denominatore tante volte la cifra 9 quante sono le cifre del periodo.*

Così p. e. le frazioni generatrici delle decimali periodiche 0,777..., 0,23 23... sono $\frac{7}{9}$ e $\frac{23}{99}$.

Dim. Sia la frazione periodica semplice 0,451 451 451.....

Chiamiamo a il valore di questa frazione sino ad un dato periodo, p. e. sino al terzo; si avrà

$$a=0,451\,451\,451.$$

Trasportiamo la virgola dopo del primo periodo, il che equivale a moltiplicare il secondo membro dell' eguaglianza per 1000, perciò conviene moltiplicare anche il primo membro per 1000, affinchè non si turbi l' eguaglianza, e si avrà

$$a\times1000=451,451\,451.$$

Togliamo ora da questa eguaglianza la precedente, e verrà

$$a\times999=451,451\,451-0,451\,451\,451.$$

Eseguiamo la sottrazione dei due primi periodi, e lasciamo

accennata quella del terzo, dopo di averlo prima scritto sotto la forma $\frac{451}{1000^3}$, verrà così

$$a \times 999 = 441 - \frac{151}{1000^3};$$

e dividendo ambedue i membri per 999, si avrà

$$a = \frac{451}{999} = \frac{451}{1000^3 \times 999}.$$

Da qui si vede che se invece di considerare il valore della frazione sino al terzo periodo, si fosse considerato sino ad un periodo indicato dal numero n, il valore della frazione sarebbe stato

$$a = \frac{451}{999} - \frac{451}{1000^n \times 999}, \text{ ossia } a = \frac{451}{999} - \frac{1}{1000^n} \times \frac{451}{999}.$$

Ora la frazione $\frac{451}{999}$ essendo sempre una frazione vera, il prodotto $\frac{1}{1000^n} \times \frac{451}{999}$ sarà sempre minore della frazione $\frac{1}{1000^n}$; perciò la quantità che si toglie dal secondo membro quando si considera un periodo, cioè quando $n=1$, è minore di un millesimo; quando si considerano due periodi, cioè quando $n=2$ è minore di un millesimo elevato a quadrato, ossia di un milionesimo; quando si considerano 3 periodi, cioè quando $n=3$, è minore di un millesimo elevato a cubo, ossia di un bilionesimo. Essa dunque diminuisce rapidamente a misura che cresce il numero dei periodi, e si annulla quando essi sono infiniti; ma allora a rappresenta tutta la frazione periodica; perciò essa viene eguale a $\frac{451}{999}$. Dunque la frazione generatrice di un'altra decimale periodica semplice, è quella che ha per numeratore il periodo e per denominatore tante volte la cifra 9 quante sono le cifre del periodo.

La stessa cosa potrebbe dimostrarsi nel seguente modo.

Sappiamo che le frazioni $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, ec. equivalgono rispettivamente alle frazioni decimali periodiche 1,111.., 0,010101.., 0,001001001. Da ciò segue che, se si hanno p. e. le frazioni periodiche semplici 0,777..., 0,232323..., la prima che ha il periodo di una cifra, equivale

a $0,111\ldots\times 7=\frac{1}{9}\times 7=\frac{7}{9}$; e la seconda che ha il periodo di due cifre, equivale a $0,010101\ldots\times 23=\frac{1}{99}\times 23=\frac{23}{99}$.

219. *La frazione generatrice di un' altra decimale periodica mista è quella che ha per numeratore la differenza fra l'intero che si ottiene trasferendo la virgola dopo il primo periodo, e l'intero formato dalle cifre irregolari, ed ha per denominatore la cifra 9 scritta tante volte quante sono le cifre del periodo seguita da tanti zeri quante sono le cifre irregolari.*

Sia la frazione periodica mista 0,32675675...

Trasferendo la virgola dopo le cifre irregolari, essa si moltiplica per 100; perciò se indichiamo con a la proposta frazione, verrà $a=\frac{32,675675\ldots}{100}$; e scrivendo invece della frazione periodica semplice, che è dopo l'intero 32, la sua generatrice, verrà $a=32\frac{675}{999}:100=\frac{32\times999+675}{999\times100}$

$$=\frac{32\times(1000-1)+675}{999\times100}=\frac{32000-32+675}{999\times100}=\frac{32675-32}{99900}.$$

Se invece di una frazione decimale finita, com'è p. e. 0,236, si adopera la periodica equivalente 0,235999... (n.° 217), si può chiaramente vedere come la regola dà la prima per generatrice della seconda: in effetti, la regola dà per generatrice la frazione

$$\frac{2359-235}{9000}=\frac{235\times10+9-235}{9\times1000}=\frac{235\times(10-1)+9}{9\times1000}=\frac{235+1}{1000}=\frac{236}{1000}.$$

220. Il numeratore della frazione generatrice di una periodica mista non può terminare con zero. Perchè riflettendo al modo come si ottiene il numeratore, se esso terminasse con zero, l'ultima delle cifre irregolari eguaglierebbe l'ultima del periodo; ed in tal caso la periodica non sarebbe più la proposta. Difatti sia p. e. la frazione periodica mista 0,74923923..., e supponiamo per un momento che l'ultima delle cifre irregolari invece di essere 4 fosse eguale a 3, che è l'ultima del periodo; la frazione periodica allora sarà 0,7392392392..., dove il periodo non comincia più dalla cifra 9, ma dalla cifra 3, il che è contro l'ipotesi.

221. *La frazione irriducibile generatrice di un' altra periodica mista ha nel denominatore uno dei fattori 2 o 5 o ambedue ripetuti tante volte quante sono le cifre irregolari,*

In effetti, essa essendo eguale alla frazione che ha per denominatore la cifra 9 scritta tante volte quante sono le cifre del periodo, e seguita da tanti zeri quante sono le cifre irregolari, il denominatore avrà i fattori 2 e 5 ripetuti tante volte quante sono le cifre irregolari; ma nel numeratore non possono esservi ambedue questi fattori, altrimenti sarebbe terminato da zero; perciò se il numeratore tiene il solo fattore 2, nel denominatore resta il fattore 5 preso tante volte quante sono le cifre irregolari, perchè non può sopprimersi con lo stesso fattore nel numeratore. Il contrario avviene se nel numeratore si trova il solo fattore 5. Dunque la frazione generatrice di un' altra periodica mista, ridotta a minimi termini, tiene per fattori nel denominatore uno dei numeri 2 o 5, o ambedue presi tante volte quante sono le cifre irregolari.

Da ciò segue che il numero delle cifre irregolari viene indicato dal massimo esponente che il fattore 2 o 5 tiene nel denominatore.

222. *La frazione irriducibile il cui denominatore non è divisibile per 2 e per 5, si sviluppa in periodica semplice.*

Difatti non può convertirsi esattamente in decimale, perchè il denominatore non è formato dai fattori 2 e 5; e non può svilupparsi in periodica mista, altrimenti sarebbe eguale alla generatrice di questa, la quale ha nel denominatore il fattore 2 o 5, il che è contro l' ipotesi.

223. *Una frazione irriducibile che ha il denominatore divisibile per 2 o per 5 ed anche per altri fattori, si converte in periodica mista.*

Difatti, non può convertirsi esattamente in decimale, perchè oltre dei fattori 2 e 5 contiene ancora altri fattori; nè può svilupparsi in periodica semplice, altrimenti verrebbe eguale alla generatrice di questa, cioè ad una frazione irriducibile che non ha nel denominatore il fattore 2 o 5, il che è contro l' ipotesi.

RIDUZIONE DI UNA FRAZIONE DECIMALE IN FRAZIONE ORDINARIA.

224. *Una frazione decimale quando non è periodica si riduce in frazione ordinaria prendendo per numeratore il numero che risulta facendo astrazione dalla virgola, e per de-*

nominatore l' unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali.

Non resta poi che a semplificare la frazione emergente, semplificazione che si vede a colpo d'occhio, perchè il denominatore essendo divisibile solamente per 2 e per 5 una o più volte di seguito, se il numeratore sarà divisibile per gli stessi numeri, la frazione sarà semplificabile.

Così p. e. le frazioni 3,64 e 0,125 ridotte in frazioni ordinarie equivalgono a $\frac{364}{100}$ e $\frac{125}{1000}$; ma essendo i termini della prima divisibili per 4 e quelli della seconda divisibili per 25, esse vengono eguali a $\frac{91}{25}$ ed $\frac{1}{8}$.

Se poi la frazione decimale fosse periodica abbiamo già detto nei n.ri 218 e 219 come si trova la frazione ordinaria equivalente.

CORREZIONE DELLA CIFRA A DRITTA DI UN NUMERO APPROSSIMATO.

225. Sia il numero 0,216438 che voglia esprimersi in millesimi disprezzando le unità degli ordini inferiori.

Prima di tutto è chiaro che trascurando le cifre a dritta di quella dei millesimi si avrà il numero 0,216, il quale differisce dal vero per meno di un millesimo, perchè le unità rappresentate dalle cifre degli ordini inferiori fanno meno di un millesimo.

Ma osserviamo che quando la prima delle cifre disprezzate è minore di 5, come nel nostro caso in cui è 4, tutta la parte disprezzata fa meno di mezzo millesimo, perchè non giunge a fare 5 diecimillesimi; perciò arrestandosi alla cifra dei millesimi, il numero 0,216 che ne risulta differisce dal vero per meno di mezzo millesimo.

Se poi la prima delle cifre disprezzate fosse 5 o maggiore di 5, la parte disprezzata essendo maggiore di mezzo millesimo, perchè 5 diecimillesimi con le altre cifre a dritta fanno più di mezzo millesimo, ne segue che il numero si avvicina più a 0,217 che a 0,216; perciò in tal caso conviene meglio aumentare di un' unità la cifra dei millesimi, e ritenere 0,217

per numero approssimato, il quale è maggiore del vero, e ne differisce per meno di mezzo millesimo, dicendosi approssimato *per eccesso o in più.*

Dunque: *la cifra a dritta di un numero approssimato si corregge aumentandola di un' unità solo quando la prima delle cifre disprezzate è 5 o maggiore di 5*; ed il numero che si ottiene si dice che *pecca per eccesso*, mentre quando non si fa la correzione si dice che *pecca per difetto.*

Questa regola è applicabile generalmente a qualunqne quantità che voglia valutarsi in unità intere di un certo ordine. Così p. e. un esercito contandosi per unità di migliaia di uomini, se il numero degli uomini fosse comprèso fra 63000 e 64000, si dirà di essere 63000, o 64000, secondo che il numero degli uomini da aggiungersi a 63000 sia minore o maggiore di un mezzo migliaio.

Similmente, se per esempio abbiasi una certa lunghezza compresa fra 85 ed 86 metri, la quale sia maggiore di 85 metri e mezzo, si dirà essere 86 metri e non 85: perchè il primo numero differisce meno dal vero. Se poi la detta lunghezza fosse minore di 85 metri e mezzo, si riterrà il numero 85 per esprimere il valore della medesima, perchè si differisce meno dal vero.

326. *Avvertimento.* Se si abbia un numero decimale approssimato sino ad un certo grado, e la sua cifra a dritta fosse zero, questo zero non potrà sopprimersi, altrimenti si incorrerebbe in errore sul grado di approssimazione. Così p. e. se si sopprimesse lo zero nel numero 4,370 che si suppone approssimato sino ai millesimi, esso diverrebbe 4,37; ma questo numero sebbene sia uguale a 4,370, non pertanto, perchè nei numeri approssimati il grado di approssimazione viene indicato dall' unità dell' infimo ordine decimale, nel numero 4,37 si giudicherebbe che l' approssimazione è sino ai centesimi, e non già sino a' millesimi.

CAP. VI.

SISTEMA METRICO.

227. Si chiama *sistema metrico* di una popolazione il complesso di tutte le misure che sono in uso presso la medesima.

Qui dunque giova ricordare che cosa sia *misura.*

Misurare una grandezza vuol dire paragonarla ad un' altra

della stessa natura presa per unità, per vedere quante volte contiene questa unità, o quante parti contiene dell' unità.

Dunque la misura di una grandezza viene espressa dal numero che indica quante unità e parti dell' unità sono contenute in essa.

Le principali grandezze che occorre misurare negli usi sociali sono le linee, le superficie, i volumi, i pesi, il tempo, e la moneta. È però le principali unità di cui si fa uso sono l' *unità lineare*, l' *unità superficiale*, l' *unità di capacità* o *volume*, l' *unità di tempo*, e l' *unità di moneta*.

Per *unità lineare* si prende una linea retta di convenuta lunghezza.

Conviene poi scegliere questa linea in modo che se ne conosca il valore rispetto ad un' altra linea immutabile in natura, affinchè in ogni tempo si possa ottenere, anche se si distruggessero i moduli della stessa.

Per *unità superficiale* si prende il *quadrato* che ha per lato l' unità lineare (*).

Per *unità di volume* o *di capacità* si prende il cubo che ha per lato l' unità lineare (**).

Per *unità di peso* si prende il peso di un determinato volume di acqua distillata, ossia pura, ad una data temperatura e pressione barometrica (***).

(*) Il *quadrato* è una porzione di superficie piana chiusa da quattro linee rette eguali e perpendicolari fra loro come si vede nella figura qui affianco. Ognuna di queste quattro rette si chiama *lato* del quadrato. Un quadrato, secondo che il suo lato è lungo un metro, un piede, un palmo, ec. si dice *metro quadrato*, *piede quadrato*, *palmo quadrato*, ec.

(**) Il *cubo* è un volume chiuso da sei facce che sono quadrati eguali. Il lato di ciascuno di questi quadrati si chiama *lato* del cubo; perciò il cubo tiene in tutto dodici lati. Un cubo, secondo che il suo lato è lungo un metro, un piede, un palmo, ec. si dice *metro cubo* o *cubico*, *piede cubo* o *cubico*, *palmo cubo* o *cubico*.

(***) Per unità di peso conviene prendere il peso di un determinato volume di una materia che non sia soggetta a cambiar di peso; e però non sarebbe buono p. e. il legno il quale diviene più leggiero quando l' aria è secca. Si preferisce l' acqua, perchè è una cosa comunissima, ed inoltre, essendo liquida, le si può dare qualunque forma mettendola in un vaso che abbia la forma desiderata. Essa deve essere distillata, perchè così si purifica da altre materie con cui può trovarsi

Per *unità di tempo* si prende il *giorno*, che è l' intervallo di tempo che passa dalla mezza notte alla mezza notte seguente. Esso si divide in 24 *ore*, e l' ora in 60 *minuti primi*, ed il minuto primo in 60 *minuti secondi*, e così di seguito.

Per *unità di moneta* si prende un determinato peso di metallo coniato, ordinariamente di argento, ed anche di oro, o di rame.

I gioiellieri nel pesare le pietre preziose fanno uso di una unità di peso convenzionale detta *carato* (*) che si divide in quattro *grani*; ed il grano si suddivide in *ottavi* e *sedicesimi*.

---

combinata, come sono p. e. lo zolfo, il ferro, il sal comune, ec.; e così resta sempre del medesimo peso. Deve essere ad una data temperatura, perchè cambiando la temperatura essa diviene più o meno porosa, ed allora lo stesso volume di acqua cambierebbe di peso. Si sceglie la temperatura a quattro gradi del termometro centigrado, perchè allora acquista la massima densità, cioè un determinato volume contiene il massimo di matèria acquea. Deve essere riferita ad una determinata pressione dell' aria, la quale viene misurata da un istrumento chiamato *barometro;* perchè un corpo è tanto più leggiero quanto più è pesante l' aria in cui giace: e perciò si prende il peso dell' acqua nel vuoto, in cui la pressione barometrica è zero.

(*) Dall' arabo *Kuara*, nome d' albero i cui semi secchi conservano lo stesso peso; e perciò taluni popoli dell' africa l' usavano da tempo immemorabile per pesare l' oro, e poi se n' estese l' uso anche alle pietre preziose. Il carato di cui fanno uso tutti i gioiellieri del mondo incivilito equivale a decigrammi 2,0654, e si divide in 4 *grani*; perciò un grano del carato equivale a grammi 0,51385.

Se paragoniamo il grano del carato al grano dell' oncia francese si ha che grani 74 $^1/_{16}$ del carato eguagliano 72 grani dell' oncia francese ossia 3 scrupoli.

Se poi paragoniamo il grano del carato al grano dell' oncia napolitana che si dice pure *acino*, si ha che grani 17 $^1/_4$ del carato eguagliano 20 acini dell' oncia napolitana ossia un trappeso; e quindi un carato è uguale ad acini 4,636 dell' oncia napolitana.

I gioiellieri napoletani nel pesare i brillanti dividevano l' oncia napoletana in 130 carati, perchè la parte 130ma dell' oncia equivale prossimamente ad un carato. In effetti, un carato, che è acini 4,636 dell'oncia napolitana, moltiplicato per 130 dà per prodotto acini 602,68; e quindi un oncia, che è 600 acini, è minore di 130 carati, e ne differisce per acini 2,68. Questo errore non sarebbe trascurabile sul peso di molti carati, perchè sul peso di 13 carati che, secondo i gioiellieri napoletani equivarrebbe ad un decimo dell' oncia, l' errore sarebbe 0,268 di acino dell' oncia, ossia 0,23 di grano del carato, cioè quasi un quarto di grano, il cui prezzo in Napoli è circa 16 lire per i bril-

Le condizioni a cui deve soddisfare un buon sistema metrico sono che tutte le misure derivino con rapporti semplici ed esatti dall' unità lineare, e questa deve ricavarsi da un fatto immutabile in natura, affinchè in ogni tempo, anche se venissero distrutti i *moduli* o *campioni* della detta unità, essa possa sempre ritrovarsi. Fu perciò che nel 1799 una commissione di dotti francesi, italiani, e spagnuoli stabilì per unità lineare una parte aliquota del *meridiano terrestre*, e questa fu la diecimilionesima parte del quarto di esso meridiano, alla quale si diede il nome di *metro* (misura per eccellenza).

Un sistema metrico è *perfetto* quando le divisioni e suddivisioni dell' unità sono decimali. Egli è perciò che in primo luogo faremo parola del sistema metrico decimale.

SISTEMA METRICO DECIMALE.

228. L' *unità di lunghezza* base di tutto il sistema metrico decimale è il *metro*: esso è uguale alla diecimilionesima parte del quarto del meridiano terrestre, cioè della distanza del polo dall' equatore contata sulla superficie del mare.

I multipli decimali dell' unità, sia lineare, sia qualunque, si enunciano facendo precedere il nome dell' unità dalle parole *deca, etto, chilo, miria* che significano rispettivamente *dieci, cento, mille, diecimila*. I summultipli si enunciano facendo precedere il nome dell' unità dalle parole *dieci, centi, milli*, che significano *decimi, centesimi, millesimi* dell' unità. Così, per esempio, si dice *decametro, ettometro, chilometro, miriametro* per dinotare rispettivamente dieci, cento, mille, dieci-

---

lanti minori di 2 grani, ma per i brillanti di maggior peso, il prezzo di un grano potrebbe duplicarsi, triplicarsi e crescere assai dippiù.

Il *carato* è anche un' altra sorta di unità che si usa nei lavori di oreficeria, dividendosi una massa qualunque di oro in 24 parti eguali dette *carati*, e l' oro si dirà p. e. di 18 carati, se delle 24 parti eguali in cui si divide la sua massa, 18 sono di oro puro, e le altre 6 sono di diverso metallo che suol essere rame o argento. Insomma il numero dei carati indica il numero delle parti di oro puro che sono in una massa di oro la quale si concepisce divisa in 24 parti eguali.

Il carato dell' oro si suddivide in 16 parti eguali ossia in *sedicesimi*, ed anche in 32 parti eguali dette *grani*.

mila metri; e dicesi *decimetro, centimetro, millimetro* per dinotare decimi, centesimi, millesimi di metro.

Ecco qui appresso le diverse specie di misure.

MISURE LINEARI.

229. L' unità di misura di lunghezza è il *metro*.

Multipli decimali del metro.	*Summultipli decimali del metro.*
Decametro = dieci metri	Decimetro = un decimo del metro.
Ettometro = cento metri	Centimetro = un centesimo del metro
Chilometro = mille metri	Millimetro = un millesimo del metro
Miriametro = diecimila metri	

MISURE DI SUPERFICIE.

230. L' unità di misura di superficie è il *metro quadrato*. Per le misure agrarie si fa uso del *decametro* quadrato, che è cento metri quadrati e dicesi *ara*; e si fa pure uso dell' *ettara*. Da qui si vede che la *centiara* non è che il metrò quadrato sotto altro nome.

Multipli decimali del metro quadrato.

Decametro quadrato ossia *ara*	= cento metri quadrati
Ettometro quadrato ossia *ettara* eguale a cento are	= diecimila metri quadrati
Chilometro quadrato	= un milione di metri quadrati
Miriametro quadrato	= cento milioni di metri quadrati.

Summultipli decimali del metro quadrato.

Decimetro quadrato = centesima parte del metro quadrato.
Centimetro quadrato = diecimilesima parte del metro qnadrato.
Millimetro quadrato = milionesima parte del metro quadrato.

Da qui si vede che i multipli del metro quadrato i quali si usano non sono di dieci in dieci volte più grandi, come nelle misure lineari, ma sono di cento in cento volte più grandi. Ed i summultipli sono di cento in cento volte più piccioli. Ciò nasce dal perchè, se un numero è 10 volte maggiore di un altro, il quadrato del primo è 100 volte maggiore del quadrato del secondo.

MISURE DI VOLUME O DI CAPACITÀ.

231. L'unità di misura di volume è il *metro* cubo, il quale quando si adopera per misurare il legname si chiama *stero*. Riguardo a' suoi multipli e summultipli, si fa uso del solo *decastèro* e *decistèro*.

Misure di capacità per i liquidi e per gli aridi.

L'unità di misura per i liquidi e per gli aridi è il decimetro cubo che si chiama *litro*, ed è la millesima parte del metro cubo.

I multipli decimali del litro sono il *decalitro*, l'*ettolitro* ed il *chilolitro*.

I summultipli decimali sono il *decilitro*, ed il *centilitro*.

Se paragoniamo i cubi fatti sulle parti decimali del metro, questi sono di mille in mille volte minori. Così il decimetro cubo, ossia il litro, è mille volte minore del metro cubo; ed il centimetro cubo è mille volte minore del decimetro cubo, e quindi è la milionesima parte del metro cubo. Ciò nasce dal perchè se un numero è dieci volte maggiore di un altro, il cubo del primo è mille volte maggiore del cubo del secondo.

MISURE DEI PESI.

232. L'unità di misura dei pesi è il *grammo* o *grdmma*, che è il peso nel vuoto di un centimetro cubo di acqua distillata alla temperatura di 4 gradi del termometro centigrado, perchè allora l'acqua ha la massima densità.

Multipli decimali del grammo.	*Summultipli decimali del grammo.*
Decagrammo = dieci grammi.	Decigrammo = un decimo del grammo.
Ettogrammo = cento grammi.	Centigrammo = un centesimo del grammo.
Chilogrammo = mille grammi.	Milligrammo = un millesimo del grammo.
Miriagrammo = diecimila grammi.	
Quintale metrico = cento chilogrammi.	
Tonnellata metrica = mille chilogrammi.	

MONETE.

233. L'unità delle monete è la *lira* (con nome francese dicesi anche *franco*). Essa è un pezzo di argento coniato in forma di disco del peso di cinque grammi, su i quali vi ha un decimo di rame e nove decimi di argento puro; perciò la lira contiene grammi 4,50 di argento puro.

Vi sono le monete di argento di 2 lire e di 5 lire, e quelle di 50 centesimi ossia mezza lira, di un quarto di lira, e di 20 centesimi ossia un quinto di lira. Quaranta pezzi di 5 lire, cioè 200 lire pesano giusto un chilogrammo.

Le monete d'oro si coniano sulla base che il valore legale di una moneta di oro equivale a 15 volte e mezzo il valore di una moneta di argento di egual peso. Da ciò ne segue che 155 pezzi di oro, ciascuno di 20 lire, pesano giusto un chilogrammo. Partendo da questa conoscenza si trova che la moneta di oro di 20 lire pesa grammi 6,45161, quella di 10 lire pesa grammi 3,22580, e quella di 5 lire pesa grammi 1,61200.

Le monete di rame o bronzo sono coniate sulla base che quella di un centesimo deve pesare un grammo; perciò quella di 5 centesimi pesa 5 grammi, e quella di 10 centesimi pesa 10 grammi. In tal modo le monete di rame possono benissimo servire di pesi quando non sono consumate.

Le monete di rame o bronzo che si coniano sono quelle di 10 centesimi, di 5 centesimi, di 2 centesimi, e di un centesimo.

Titolo delle monete.

234. L'oro e l'argento non possono aversi mai puri senza costose operazioni; perciò si preferisce adoperarli alquanto impuri, il che giova ad aumentarne la durata. Ciò premesso:

Si chiama *titolo* di una massa di oro o di argento la quantità di oro e di argento puro che si trova in essa, paragonata al peso di tutta la massa.

Così p. e. se una massa di oro impuro del peso di 24 grammi tiene 20 grammi di oro puro, il titolo è $^{20}/_{24}$; cioè il peso dell'oro puro rispetto al peso totale della massa impura è $^{20}/_{24}$ del peso di tutta la massa.

Ordinariamente il peso dell'intera massa si concepisce diviso in 1000 parti eguali, e perciò, se p. e. 900 di queste parti sono di oro puro, si dirà che il titolo è di 0,900. Lo stesso si dica dell'argento.

È stato provato che la lega la quale dà maggior durata all'argento si ottiene allegandolo al rame col titolo di $^{11}/_{12}$, cioè mescolando 11 parti argento puro ed una di rame.

Abbiamo detto più sopra che nei lavori di oreficeria si usa esprimere il titolo in *carati*, dividendosi il peso di tutta la massa in 24 parti eguali dette *carati*; e così se 18 di esse parti sono di oro puro ed altre sei di altro più vile metallo (ordinariamente rame) si dice che l'oro è di 18 carati; il che equivale a dire che il titolo è di 0,750.

In Napoli nei lavori comuni di oreficeria, il titolo dell'oro si usa di 12 carati; e perciò i lavori sono metà di oro e metà di rame, e qualche volta vi è pure argento.

Riguardo poi all'argento, sia lavorato sia monetato, si usava il titolo di $^{10}/_{12} = ^5/_6 = 0,333\ ^1/_3$, che si bollava col numero 8; e per qualche particolare lavoro si usava anche il titolo di $^{11}/_{12}$ che si bollava col numero 7. Affianco al numero era impressa la testa di Partenope, simbolo di Napoli, e la lettera *N* per indicare che era lavoro nostrale; ponendosi la lettera *E* quando era lavoro estero.

Lo stesso bollo si poneva sull'oro lavorato, variandosi il numero a seconda del titolo o dei carati nel seguente modo. Il numero 6 voleva dire che l'oro era di 12 carati o più, ma al di sotto di 14; il numero 5 voleva dire che l'oro era di 14 carati o più, ma al di sotto di 16; il numero 4 indicava essere di 16 carati o più, ma al di sotto di 18; il numero 3 dinotava essere di 18 carati o più, ma al di sotto di 20; il numero 2 indicava essere da 20 a 22 carati; ed il numero 1 da 22 a 24 carati.

Questo *bollo di garantia* si metteva sull'oro ed argento all'Offizio della Zecca dove gli orefici erano obbligati a portare gli oggetti, sia nostrali sia esteri, per farli bollare, senza di che era proibito esporli in vendita.

Nelle antiche provincie del Regno italiano sono due i titoli legali tanto per l'oro che per l'argento, i quali vengono garantiti dal *bollo* o *marchio* che i spacciatori degli oggetti sono obbligati di farvi apporre dai *saggiatori* destinati dal Governo.

Per i lavori di oro il primo titolo (che poco si usa) è di 0,840; ed il secondo è di 0,750 ossia di 18 carati.

Per i lavori di argento il primo titolo è di 0,850, ed il secondo è di 0,800.

Il primo titolo dell'oro per i grossi lavori si bolla con un'aquila coronata che porta in petto il numero 1, e per i piccioli lavori si bolla con una testa di aquila rivolta verso la dritta dello spettatore.

Il secondo titolo dell' oro per i grossi lavori si bolla con una croce coronata che ha in mezzo il numero 2; e per i piccioli lavori si bolla con una testa di aquila rivolta verso la sinistra dello spettatore.

Il primo titolo dell' argento per i grossi lavori si bolla con un' aquila coronata che porta in petto una croce, e per i piccioli lavori, con una testa di leone rivolta verso la dritta dello spettatore. Il secondo titolo dell' argento per i grossi e piccioli lavori si bolla con una testa di leone rivolta verso la sinistra dello spettatore.

Su i lavori prevenienti dall' estero si aggiunge una cifra composta delle tre lettere intrecciate E, S, T.

Il titolo della moneta del Regno italiano, sì per l' oro che per l' argento è di 0,900. La lega del bronzo è di $^{24}/_{25}$ rame ed $^{1}/_{25}$ stagno (*).

235. Siccome è difficile coniare le monete del preciso titolo e del preciso peso stabilito dalla legge, così la legge stessa ammette che si possa eccedere in più o in meno nel peso e nel titolo, il che dicesi *tolleranza* di peso, o di titolo. La tolleranza di titolo per le monete di oro è di 2 millesimi del loro peso, in più o in meno, e di 3 millesimi per l' argento. La tolleranza di peso nelle monete di oro di 20 e di 10 lire è di 2 millesimi del loro peso; in quella di 100 lire è di 1 millesimo, ed in quella di 5 lire di 3 millesimi.

La tolleranza di peso nella moneta di argento di 5 lire è di 3 millesimi del suo peso, in quella di 2 lire è di 5 millesimi, in quella di 50 centesimi è di 7 millesimi, ed in quella di 25 è di 10 millesimi.

Le monete con l' uso si consumano; e l' esperienza ha mostrato che lo *strugimento* nella moneta di 5 lire fa perdere ad essa 4 milligrammi del suo peso in ogni anno.

Valore nominale e reale delle monete.

236. Il valore *nominale*, *estrinseco*, o *legale* di una moneta è il valore che le viene attribuito dalla legge.

Il valore *reale* o *intrinseco* è quello che essa ha come merce, indipendentemente dalle spese di fabbricazione e da quel valore che le può dare la legge.

(*) Per evitare l' estrazione delle monete di argento italiane procurata dai manifatturieri di monete estere, i pezzi di argento al di sotto di 5 lire coniate dal 1861 in poi sono del titolo di 0,835. Ciò ha recato ancora un' economia di più milioni allo Stato.

Anche l'oro e l'argento lavorato cioè quello di oreficeria ha il valore intrinseco, che è quello indipendente dalla spesa più o meno elevata dalla manifatturazione.

Nelle monete di oro e di argento vi è poca varietà fra il valore intrinseco e l'estrinseco, essendo la differenza la sola spesa cagionata dalla coniazione.

Ma nella moneta di rame e di bronzo il valore nominale è tre o quattro volte più grande del valore reale.

Il Governo, che solo ha il dritto di coniare la moneta, ne dà l'incarico ad impresarii; e paga ai medesimi circa lire 8,44 per ogni chilogramma di oro coniato, e lire 2,72 per ogni chilogramma di argento coniato (*).

Per avere il valore nominale di un chilogrammo di argento puro monetato al titolo di 0,9; osserviamo che siccome 2 lire pesano 10 grammi, dei quali 9 sono di argento puro, ne segue che 9 grammi di argento puro valgono 2 lire, quindi un grammo vale la nona parte di 2 lire, cioè lire 0,2222...; perciò un chilogrammo di argento puro monetato vale lire 222,222...

Il valore reale o intrinseco della moneta di argento si ottiene togliendo dal valore nominale la spesa erogata per la sua fabbricazione, che è di lire 2,72 per ogni chilogrammo di argento monetato. Perciò il valore intrinseco di un chilogrammo di argento monetato sarà lire 219,50.

Per avere il valore nominale dell'oro monetato, si può ricorrere al dato che 155 pezzi di 20 lire pesano giusto un chilogrammo; e perciò 1000 grammi di oro monetato valgono lire 3100; e siccome 900 di questi sono di oro puro; ne segue che 900 grammi di oro puro valgono lire 3100, quindi un grammo vale la 900ma parte di lire 3100, ossia lire 3,444...; perciò un chilogrammo di oro monetato vale lire 3444,444...

Per lo stesso oggetto avremmo potuto avvalerci della conoscenza che il valore dell'oro puro è 15 volte e mezzo maggiore del valore di un egual peso di argento puro.

(*) Nell'ultimo appalto fatto dal Governo con la Banca nazionale il compenso per la monetazione si è pattuito a lire 7,444... il chilogrammo per l'oro, ed a lire 1,7222... per l'argento; e ciò per l'uso gratuito degli edifizi e degli utensili atti alla monetazione concessi dal Governo alla Banca. Le monete di bronzo si sono pagate da lire 4,50 sino a lire 6,20 il chilogrammo compresa la pasta metallica.

Ora se togliamo da questo valore di un chilogrammo di oro monetato la spesa di lire 8,44 che si richiede per la coniazione, si ottiene il valore intrinseco di un chilogrammo di oro monetato che viene lire 3436.

Cambio delle monete.

237. Si dice *cambio delle monete* la permutazione che si fa di oro o di argento puro per moneta. Questa permutazione si pratica nell'Amministrazione della Zecca, dove un particolare può portare oro o argento, per averne in cambio moneta; ma in questo cambio l'Amministrazione tiene conto della sola quantità di oro o di argento puro, senza calcolare affatto le spese di manifatturazione e di altri ornamenti che potrebbero essere negli oggetti di oro o argento, i quali vogliono cambiarsi in moneta.

Tale cambio viene regolato sulla base che un chilogrammo di oro puro equivale a lire 4436, ed un chilogrammo di argento puro equivale a lire 219,50, come abbiamo veduto più sopra.

Passiamo ora a risolvere il seguente

Problema. ***Quanto vale al cambio delle monete un candeliere di argento del titolo di 0,833 che pesa chilogrammi 2,68?***

Troveremo prima la quantità di argento puro contenuto nel candeliere prendendo 833 millesimi del suo peso, cioè moltiplicando 2,68 per 0,833; e tale quantità risulterà eguale a 2,23244. Dopo ciò, siccome si conosce che un chilogrammo di argento puro vale lire 219,50, ne segue che chilogrammi 2,23244 debbono valere un numero di lire $219,50 \times 2,23244 = 490,02458$ (n.° 186).

Valore al pari delle monete.

238. Si ha il valore *al pari* di due monete di oro, allorchè si paragona la sola quantità di oro puro che è in una alla quantità di oro puro che è nell'altra, senza curarsi del valore del rame ed anche dell'argento che potrebbe trovarsi alligato con l'oro. Lo stesso si dica del valore al pari di due monete di argento.

Da qui si vede che per conoscere il valore al pari di due monete conviene dividere il peso dell'oro o argento puro

contenuto in una, pel peso dell' oro o argento puro contenuto nell' altra.

Sia p. e. da trovarsi il valore al pari della *lira* italiana rispetto alla *piastra* napolitana.

La *lira* italiana pesa grammi 5, ed è del titolo di 0,900 ; perciò essa contiene grammi 4,5 di argento puro. La *piastra* napolitana pesa grammi 27,532 (ossia trappesi napolitani 30,9), ed il suo titolo è 0,833 $^1/_3$; quindi l' argento puro contenuto nella piastra è 27,532×0,83333=22,94324 , arrestandosi a cinque decimali. Dunque si ottiene il valore al pari della lira rispetto alla piastra dividendo 4,50 per 22,94324 , e risulta eguale a 0,196136. Volendo poi il valore della lira rispetto al *grano* che è 120 volte minore della piastra , si moltiplicherà il risultato ottenuto per 120 e si trova che la lira è uguale a grani 23,536.

Se si facesse il calcolo rispetto alle lire coniate nel 1863 che sono del titolo di 0,835, si trova che la lira equivale a grani 21,83.

SISTEMA METRICO NAPOLITANO ANTERIORE ALLA LEGGE DEL 1840.

239. L' unità lineare per gli usi di commercio era il *palmo*. Esso dividevasi in 12 *once* , l' oncia in 5 *minuti* , ed il minuto in 10 *punti*. Otto palmi formavano una *canna*.

Gli Architetti facevano uso della *pertica* che dividevasi in 10 palmi.

Per le misure agrarie l' unità lineare era il *passo* uguale a 7 palmi ed un terzo.

Per le misure geografiche si usava il *passo geografico* (*) uguale a 7 palmi; perciò era diverso del passo agrario.

L' unità di superficie per le misure comuni era il *palmo quadrato*, e solevasi anche far uso della canna quadrata.

Per le misure agrarie l' unità di superficie era il *moggio* ; cioè un quadrato avente per lato 30 passi agrarii, ossia 200

(*) Con questo passo , detto anche *passo geodetico* (che equivale a metri 1,8518515), furono fatti i scandagli della profondità delle acque marine delle coste delle due Sicilie; e queste profondità furono segnate sulle carte idrografiche da numeri che esprimono passi.

palmi. Esso dividevasi in 10 *quarte*, la quarta in 9 *none*, e la nona in 5 *quinte*: così un moggio veniva a dividersi in 450 *quinte*.

L' unità di volume distinguevasi in unità di *capacità* per i liquidi e per gli aridi, ed unità di *solidità* per le fabbriche, per il legno, pel marmo, pei metalli, ecc.

L' unità di misura per l' acqua e pel vino era il *barile* che dividevasi in 60 *caraffe*. Dodici barili formavano una *botte*, e due botti formavano un *carro*.

L' unità di misura per l' olio era lo *staio*. Esso dividevasi in 16 *quarti*, ed il quarto in 6 *misurelli* (*). Lo staio poi in peso eguagliava rotoli dieci ed un terzo. Sedici staia formavano la *salma*. Di questa salma si fa uso tuttavia nelle contrattazioni della Borsa di Napoli, e perciò essa equivale a rotoli 165 $^{1}/_{3}$. La *botte* di olio equivale a salme 2 $^{3}/_{4}$, ossia a 44 staia, e quindi a rotoli 454 $^{2}/_{3}$.

Uno staio in volume è uguale a litri 10,1710; ed il litro è eguale a staia 0,0983.

Lo staio paragonato alla caraffa è uguale a caraffe 13,983.

L' unità di misura per gli aridi, come pel grano, noci, legumi, ec. era il *tomolo*. Esso dividevasi in 4 *quarte*, e la quarta in 6 *misure*; quindi il tomolo veniva uguale a 24 *misure*.

L' unità di solidità per misurare le fabbriche era un quarto di canna cubica, che chiamavasi canna di *costumanza*.

L' unità di peso era il *rotolo*. Esso si divideva in 33 c ed un terzo, l' oncia in 10 *dramme*, la dramma in 3 *tra-pesi* o *scrupoli*, e lo scrupolo in 20 *acini* o *grani*: e però il rotolo veniva a dividersi in 1000 trappesi (**).

(*) In Napoli chiamano *quartuccio* la quarta parte dello staio.

(**) Quest' unità media più grande della libbra si adottò dopo della libbra, e volendola composta di parti decimali, era utile formarla in modo che ciascuna di queste parti decimali fosse stata eguale ad una parte aliquota della libbra; e ciò non poteva farsi diversamente che formando il rotolo di 1000 trappesi; e quindi risultava composto di once 33 $^{1}/_{3}$.

Essendosi investigato a qual peso corrispondesse un cubo di oro puro avente per lato un' aliquota del palmo, si trovò che il cubo di oro puro di un decimo di palmo pesa giusta 400 trappesi; quindi 10 di questi cubi fanno 4 rotoli. Ecco perchè il peso di 4 rotoli si chiamò *decina*, ed anche oggi si costuma di pesare la carne di porco, il lino,

Per i grandi pesi si prendeva per unità il *cantaio* equivalente a 100 rotoli.

La calce soleva misurarsi con un' unità detta *peso* equivalente a 40 rotoli.

Per taluni generi si prendeva per unità la *libbra*. Essa dividevasi in 12 *once* uguali a quelle del rotolo; e quindi l'oncia veniva a dividersi in 30 trappesi, ed anche in 600 acini.

L' unità di moneta era il *ducato*, esso si divide in 10 *carlini*, il carlino in 10 *grani*, ed il grano in 12 *cavalli* o *calli* (*).

SISTEMA METRICO NAPOLITANO SANZIONATO CON LEGGE DEL 6 APRILE 1840.

240. Ecco il testo della legge.

» La base dell' intero sistema, il *palmo*, e la settimilesima » parte di un minuto primo del grado medio del meridiano » terrestre, ovvero la settimilesima parte del miglio geografico » d' Italia, o miglio nautico di sessanta a grado. Esso sarà di- » viso in parti decimali, e dieci palmi costituiranno la *canna*.

» La Canna lineare, la Canna quadrata, e la Canna cuba » sono le unità di misura di lunghezza, di superficie, e di so- » lidità per tutti gli usi. La prima è uguale a dieci palmi » lineari, la seconda a cento palmi quadrati, e la terza a » mille palmi cubi.

» L' unità superficiale delle misure agrarie sarà il *moggio* » di diecimila palmi quadrati, o sia un quadrato che abbia » uno de' lati cento palmi, o canne dieci. Esso sarà diviso in » parti decimali.

» Il *tomolo* è l' unità delle misure di capacità per gli aridi. » Esso equivale a tre palmi cubi, e si divide in due *mezzette*

---

la canape, e la lana con l' unità di peso detta *decina* che equivale a 4 rotoli. Ma la decina del lino che ora si costuma in Napoli è di rotoli 4 e mezzo quarto. Facciamo inoltre osservare che un palmo cubico di oro puro pesa giusto 4 cantaia.

(*) L' *oncia* moneta in origine era in Napoli del medesimo peso che l' oncia peso, e l' una e l' altra dividevansi in 30 parti eguali dette *tarì*, ed il tarì si divideva in 20 parti eguali dette *grani;* ma per nominare i *tarì-pesi*, le due parole si riunirono in una dicendosi *trappesi*. I *grani* pesi si dissero anche *acini*. In Sicilia è rimasta la denominazione dell' *oncia* (moneta di conto) di 30 carlini detti *tarì*, ed il tarì in 20 *tornesi*.

» o in quattro *quarte*, o pure in ventiquattro *misure*, ciascu-
» na delle quali uguaglia il cubo del mezzo palmo.

» La misura degli aridi sarà praticata sempre a *raso*, e
» non a *colmo*.

» Il *barile* è l' unità delle misure di capacità per alcuni dei
» liquidi, come il vino, l' aceto, l' acqua, e si divide in ses-
» santa *caraffe* (*).

» Esso equivale ad un cilindro retto del diametro di un
» palmo, e di tre palmi di altezza.

» La *botte* si compone di dodici barili, ed è perciò uguale
» ad un cilindro retto di tre palmi di diametro, e quattro
» palmi di altezza.

» L'olio sarà misurato sempre a peso; cioè a cantaia, a
» rotoli, ed a frazioni decimali di rotolo.

» Pel commercio a minuto potrà misurarsi a capacità; le
» misure dovranno essere di figura cilindrica e corrispondenti
» al peso di olio che debbono contenere alla temperatura di
» 20° del termometro centigrado.

» Il *rotolo* è l' unità di misura de' pesi, e si dividerà in
» parti decimali: la sua parte millesima è il *trappeso*.

» Il *cantaio* si compone di cento rotola.

» Un palmo cubo di acqua distillata pesa in Napoli, nel-
» l' aria, rotola 20 e 736 trappesi alla temperatura di 16°,144
» del termometro centigrado (12°,92 di Reaumur) ed alla
» pressione barometrica di palmi 2,865, ossia di 28 pollici, os-
» sia di 76 centimetri (**).

(*) Una caraffa di acqua in peso è uguale ad once 27 1/10.

(**) In una Memoria su i pesi e misure d'Italia confrontate col sistema metrico francese, inserita nella 3.ª parte di un Opuscolo del *sig. Saverio Scrofani* pubblicati in Napoli nel 1812, si trovano esposte le misure della Città di Napoli verificate da un' apposita Commessione: e noi, siccome questo sistema era il migliore di tutti gli altri di Europa, dopo il sistema metrico decimale, per onore del paese diamo qui un cenno dei lavori fatti dalla detta Commessione.

L' antico campione del palmo si trovò eguale a metri 0,26367, e perciò un metro è uguale a palmi antichi 3,792620.

L' antico tomolo napoletano si misurò 84 volte con tutte le diligenze, e poi se ne prese il medio, e si trovò eguale a litri 55,3189246.

Il barile si misurò 26 volte, ed il medio risultò litri 43,6737878.

Il Colonnello Visconti nella sua Memoria inserita negli atti dell' accademia delle Scienze del 1838 sotto il titolo *sistema metrico unifor-*

RIDUZIONE DELLE UNITÀ DI UN ORDINE DEL SISTEMA METRICO DECIMALE IN ALTRE DI ORDINE INFERIORE O SUPERIORE. *

241. *Le unità di un ordine del sistema metrico decimale si riducono in unità di ordine inferiore o superiore moltiplicandole o dividendole per 10, 100, 1000, ec. secondo che quest' ordine è 10, 100, 1000, ec. volte minore o maggiore.*

Per le misure di peso, sieno p. e. 985 chilogrammi che vogliansi ridurre in unità di ordine inferiore: si avrà 985*chilogr.*=9850*ettogr.*=98500*decagr.*=985000*gr.*=9850000*decigr.*=98500000*centigr.*=985000000*milligr.*

---

me delle due Sicilie fece osservare che 'l tomolo affinchè eguagliasse 3 palmi cubici, il palmo invece di essere eguale a metri 0,26367, avrebbe dovuto farsi eguale a metri 0,2641941.

Inoltre osservò che il barile affinchè eguagliasse 3 palmi cilindrici, il palmo avrebbe dovuto farsi eguale a metri 0,2646495.

Ma siccome il palmo doveva farsi eguale a metri 0,26455 affinchè fosse stato una parte aliquota del meridiano terrestre, e propriamente la 7000.^{ma} parte del minuto, ossia del miglio italiano, convenne fare il tomolo eguale a litri 55,5451131 affinchè fosse stato eguale a 3 palmi cubici nuovi; e convenne fare il barile eguale a litri 43,6250298 affinchè fosse stato eguale a 3 palmi cilindrici nuovi. Perciò il nuovo tomolo supera l' antico di litri 0,2261885; ed il nuovo barile è minore dell' antico di litri 0,0487580.

Da qui si rileva che il nuovo palmo è uguale all' antico più 0,00534 dell' antico; ed il nuovo tomolo è uguale all' antico più 0,00408; ed il nuovo barile è uguale a 0,99888 dell' antico, e quindi la nuova caraffa è pure 0,99888 dell' antica.

Il rotolo poi del nuovo sistema metrico è rimasto eguale all' antico.

Da questi dati il Visconti ne deduceva che il vecchio palmo in origine doveva essere uguale al nuovo, e perciò aveva un rapporto esatto col miglio; e la picciola differenza dovevasi attribuire agli errori di costruzione nel rifare i campioni resi logori dal tempo.

Il Visconti fu il primo a dimostrare che il sistema metrico di Napoli godeva tutte le qualità di un buon sistema metrico, facendo vedere come tutte le misure potevano derivare con rapporti semplici ed esatti dall' unità lineare, e questa essere una parte aliquota del quarto del meridiano terrestre. Difatti, egli trovò che un' oncia cubica di acqua distillata, cioè il cubo di un dodicesimo di palmo, pesa 12 trappesi alla pressione barometrica di 28 pollici ed alla temperatura di 16° $^1/_6$ *C.*, che è presso a poco quella portata dalla legge, e che può dirsi la media di Napoli. Quindi un palmo cubico, che equivale a 1728 once cubiche, pesa 20 rotoli e 736 trappesi. Un rotolo poi eguaglia la dodicesima parte del cubo che ha per lato 10 once ossia $^5/_6$ di palmo, ripieno di acqua distillata alla detta temperatura e pressione.

Se poi vogliońsi ridurre in unità di ordine superiore, si avrà *chilogr.* 985 = *miriagr.* 98,5 = *quintali* 9,85 = *tonnel.* 0,985.

Non tralasciamo osservare che invece di leggere p. e. *9 quintali ed 85 centesimi*, può leggersi *9 quintali ed 85 chilogrammi*, ovvero *9 quintali, 8 miriagrammi* e *5 chilogrammi*.

Per le misure lineari, sieno p. e. *metri* 7396,45 da ridursi in unità di ordine inferiore, si avrà *metri* 7396,45 = *decimetri* 73964,5 = *centimetri* 759645 = *millimetri* 7396450.

Volendoli ridurre in unità di ordine superiore, si avrà che *metri* 7396,45 = *decametri* 739,645 = *ettometri* 73,9645 = *chilometri* 7,39645 = *miriametri* 0,739645.

Qui pure osserviamo che invece di leggere p. e. 73 ettometri e 9645 diecimilesimi, può leggersi *73 ettometri e 9645 centimetri.*

Per le misure di superficie, siccome queste sono di 100 in 100 volte minori o maggiori, se i metri quadrati vogliońsi ridurre in decimetri quadrati si debbono moltiplicare per 100, e poi di nuovo per 100 se si vogliono ridurre in centimetri quadrati. Così 85349 *metri quadrati* sono eguali ad 8534900 *decimetri quadrati,* ed eguali a 853490000 *centimetri quadrati.*

Viceversa, se si vogliono ridurre in *decametri quadrati* ossia *are,* si debbono dividere per 100, e poi di nuovo debbono dividersi per 100 se vogliono ridursi in *ettometri quadrati* o *ettare;* e si avrà che *metri quadrati* 85349 = *decametri quadrati* 853,49 = *ettometri quadrati* 9,5349.

Il centesimo di un metro quadrato essendo eguale ad un decimetro quadrato, ne segue che se p. e. si hanno metri quadrati 9,25 possono leggersi così: 9 metri quadrati, e 25 decimetri quadrati. Analogamente, metri quadrati 7,2563 possono leggersi così: 7 metri quadrati e 2563 centimetri quadrati.

Dunque, se un intero che rappresenta metri quadrati è seguito da due cifre decimali, queste indicano decimetri quadrati, e se è seguito da quattro cifre decimali, queste indicano centimetri quadrati, e così di seguito.

Per le misure di volume, se i metri cubi vogliońsi ridurre in decimetri cubi, debbono moltiplicarsi per 1000, e poi di nuovo per 1000 per ridurli in centimetri cubi. Al contrario debbono dividersi 1000 per ridurli in decametri cubi, e di nuovo per 1000 per ridurli in ettometri cubi.

Così si ha che *metri cubi* 13,14 = *decimetri cubi* 13140 = *centimetri cubi* 13140000 = *decametri cubi* 0,1314.

Un millesimo del metro cubo essendo eguale ad un decimetro cubo,

ne segue che metri cubi 6,254 si possono leggere così : 6 metri cubi e 254 decimetri cubi. Analogamente , avendosi metri cubi 4,029572, si possono leggere così: 4 metri cubi e 29572 centimetri cubi.

Dunque , se un intero che rappresenta metri cubi è seguito da tre cifre decimali, queste rappresentano decimetri cubi; e se è seguito da sei cifre decimali, queste rappresentano centimetri cubi, e così di seguito.

Se l'unità di volume fosse il litro, che ha i multipli di 10 in 10 volte maggiori ed i summultipli di 10 in 10 volte minori, le riduzioni si farebbero moltiplicando o dividendo successivamente per 10.

Così p. e. *litri* 57,93=*decilitri* 579,3=*centilitri* 5793=*decalitri* 3,793=*ettolitri* 0,5793=*chilolitri* 0,05793.

PREFERENZA DEL SISTEMA METRICO DECIMALE SUGLI ALTRI.

242. Il sistema metrico decimale è preferibile ad ogni altro.

1.° Perchè soddisfa la condizione che tutte le misure derivano con rapporti semplici ed esatti dall' unità lineare, e questa è ricavata da un fatto immutabile in natura, in maniera che in ogni tempo essa si può ottenere, anche se si distruggessero tutti i campioni della stessa.

2.° Perchè le unità di un ordine si riducono in unità degli ordini inferiori o superiori moltiplicando o dividendo per 10, 100, 1000, ec.; mentre negli altri sistemi bisogna moltiplicare o dividere per numeri diversi da 10, 100, 1000, ec. Quindi ne deriva che le quattro operazioni di calcolo si eseguono facilmente su i numeri concreti del sistema metrico decimale, ma negli altri occorrono molte avvertenze per eseguire le dette operazioni, come fra poco vedremo.

RAGGUAGLIO DELLE MISURE DEL SISTEMA DECIMALE CON LE NAPOLITANE, E RIDUZIONE DELLE UNE NELLE ALTRE.

243. Un metro è uguale a palmi 3,78 esattamente (*).

Un metro quadrato è uguale a palmi quadrati 14,2884 (**).

(*) In effetti, il quadrante del meridiano terrestre è uguale a 90 gradi ed il grado essendo 60 miglia, il quadrante è miglia 5400, e siccome il miglio è 7000 palmi, il quadrante è uguale a palmi 37800000; ma lo stesso quadrante è uguale a 10000000 di metri; perciò si ha

metri 10000000 = palmi 37800000 ;

dunque un metro solo è la diecimilionesima parte di palmi 37800000; perciò esso viene eguale a palmi 3,78.

(**) Perchè il quadrato di un metro equivale al quadrato di palmi 3,78 che è palmi quadrati 14,2884.

Un metro cubo è palmi cubici 54,010152=tomoli 18,0033.
Un ettolitro è uguale a tomoli 1,800 (*).
Un litro è uguale a caraffe 1,375 (**).
Un chilogrammo è uguale a rotoli 1,12233.
Un gramma è uguale a trappesi 1,12233 (***).
Una lira è uguale a grani 23,53.

244. Le misure del sistema metrico decimale si riducono in misure napolitane moltiplicando le prime pel numero che denota quant'è l'unità del primo sistema rispetto a quella del secondo. Viceversa le misure napolitane si riducono in decimali dividendole per lo stesso numero.

Così p. e. metri 15,4 si riducono in palmi moltiplicandoli per 3,78, perchè un metro essendo uguale a palmi 3,78, metri 15,4 debbono eguagliare palmi 3,78 moltiplicati per 15,4; eseguendo la moltiplicazione risultano eguali a palmi 58,212.

Viceversa, palmi 58,212 si riducono in metri dividendoli per 3,78. In effetti, indicando con x i metri incogniti, sappiamo che se questo numero di metri si volesse ridurre in palmi si dovrebbe moltiplicare per 3,78; perciò si avrebbe $x \times 3,78 = 58,212$, e dividendo i due membri per 3,78, viene $x = \frac{58,212}{3,78}$.

Dopo ciò si vede che, se dividiamo l'unità per i numeri 3,78, 14,2884, 54,010152, 1,800, 1,12233, 23,536, si troveranno i valori delle diverse unità di misure napolitane rispetto alle corrispondenti unità del sistema decimale, cioè del palmo, del palmo quadrato, del palmo cubico, del tomolo, della caraffa, del rotolo, e del ducato, rispetto al metro, al metro quadrato, al metro cubo, all'ettolitro, al litro, al chilogrammo, ed alla lira. Fatte le divisioni, si trova che

(*) Perchè il cubo del metro, ossia di palmi 3,78 è 54,010152; ed essendo il tomolo 3 palmi cubi, se si divide il precedente numero per 3 si avrà il valore del metro cubo rispetto al tomolo, e quindi anche quello dell'ettolitro ch'è 10 volte minore del metro cubo.

(**) Ciò si ricava dall'essere un barile 3 palmi cilindrici, ossia palmi cubici 2,3561949.

(***) Ciò perchè il gramma ed il trappeso sono le rispettive parti millesime del chilogramma e del rotolo; quindi hanno fra loro la stessa relazione che è fra il chilogrammo e il rotolo. È osservabile poi che il numero il quale esprime il rapporto del chilogrammo al rotolo si forma dalle tre cifre 1, 2, 3, ciascuna scritta due volte, e la prima dinota un'unità.

Viceversa: se p. e. 27 piedi si volessero ridurre in tese, bisogna dividere 27 per 6, perchè ogni tesa essendo 6 piedi, quante volte 27 contiene 6, tante tese vi sono in 27 piedi; eseguendo la divisione, si avrà che 27 piedi sono eguali a 4 tese più 3 piedi di resto.

Passiamo ad altri esempi.

249. Sieno, per esempio, *54 canne, 7 palmi, 8 once,* e *3 minuti* che vogliansi ridurre in unità dell' infima specie, cioè in *minuti* (*).

Cominceremo dal ridurre primieramente le 54 canne a palmi moltiplicandole per 8, perchè ogni canna si divide in 8 palmi: e però, intavolando l' operazione come si vede qui a fianco, si ottengono per prodotto 432 palmi, a' quali aggiungendo i 7 palmi del numero dato ne risulteranno 439 palmi. Poi questi palmi si ridurranno ad once moltiplicandoli per 12, perchè ogni palmo si divide in 12 once, e si avranno per prodotto 5268 once, alle quali aggiungendo le 8 del numero proposto si otterranno 5276 once. Infine queste once si ridurranno a minuti moltiplicandole per 5, perchè ogni oncia si divide in 5 minuti, ed al prodotto 26380 si aggiungeranno i 3 minuti; così il dato numero complesso ridotto a minuti, viene eguale a 26383 minuti.

```
   54
    8
  432
    7
  439
   12
  878
 439
 5268
    8
 5276
    5
26380
    3
26383
```

Volendo convertire una sola unità principale in unità dell' infima specie, si comincia (n.° 248) dal ridurre una canna in palmi moltiplicando 1 per 8, e si avranno 8 palmi; poi gli 8 palmi si riducono in once moltiplicandoli per 12, e si avranno 96 once; e queste si convertono in minuti moltiplicandole per 5, e si avranno 480 minuti. È da notarsi che l' operazione si riduce a moltiplicare fra loro i numeri 8, 12, e 5, che, per aiuto della memoria, si scrivono sulle iniziali delle parole dinotanti le unità secondarie.

(*) Per tenere sott' occhio le suddivisioni dell' unità principale, il proposto numero si scrive così:

```
     8  12  5
can. p. o.  m.
54   7  8   3
```

ponendo sul numero che dinota le unità di ciascuna specie le lettere iniziali del nome di queste unità, e su queste lettere il numero che indica in quante unità della specie sottoposta si divide un' unità della specie superiore.

250. Sieno date, per esempio, 35746 linee, da cui vogliansi estrarre le unità delle specie superiori, cioè i pollici, i piedi, e le tese ove mai ne contenessero.

35746	12	10
2978	12	2
248	6	2
41		

Si cominceranno ad estrarre dalle 35746 linee le unità delle specie prossima, cioè i pollici, dividendo 35746 per 12, perchè 12 linee fanno 1 pollice; e però intavolando l' operazione come si vede quì a fianco, scrivendo i resti a dritta de' divisori, il quoziente 2978 che si ottiene dinoterà pollici, ed il resto 10 dinoterà linee. Poi dal numero 2978 de' pollici si estrarranno i piedi dividendolo per 12, perchè un piede è uguale a 12 pollici; quindi il quoziente 248 che ne risulta dinoterà piedi, ed il resto 2 dinoterà pollici. Infine dal numero 248 de' piedi si estrarranno le tese dividendolo per 6, perchè 6 piedi fanno una tesa; laondo il quoziente 41 che n' emerge dinoterà tese, ed il resto 2 dinoterà piedi: adunque le 35746 linee date sono eguali a $41^{tes.}\ 2^{pi.}\ 2^{pò.}\ 10^{li.}$

Sieno per secondo esempio da ricavarsi le unità delle specie superiori da 43753 acini. Trascurando la divisione dell' oncia in dramme, ed eseguendo la divisione per 20 e per 30 come si fa per un numero semplice (n.° 83), secondo si vede quì affianco, si troverà che 43753 acini pareggiano $6^{lib.}\ 0^{o.}\ 27^{t.}\ 13^{a.}$

43753	20	13
2187	30	27
72	12	0
6		

RIDUZIONE DELLE UNITA' SECONDARIE DI UN N.° COMPLESSO IN FRAZIONE ORDINARIA O DECIMALE DELL' UNITA' PRINCIPALE.

251. *Si ridurranno le unità secondarie in unità dell' infima specie, e si avrà il numeratore; poi si riduce un' unità principale in unità dell' infima specie, e si avrà il denominatore.*

Sia p. e. il numero *8 libbre, 5 once, 7 dramme, 2 trappesi, e 9 acini*, le cui unità secondarie, vogliansi ridurre a frazione ordinaria della *libbra*.

Ridurremo le unità secondarie, cioè le 5 *once*, le 7 *dramme*, e i 2 *trappesi* in *acini*, a cui aggiunti i 9 *acini* si avranno 3469 *acini* che formano il numeratore. Poi ridurremo un' unità principale, ossia una *libbra*, in *acini*, e si avrà il denominatore, il quale viene eguale a 7200; perciò il numero proposto viene eguale a *libbre* $8\frac{3469}{7200}$.

Difatti, una libbra essendo eguale a 7200 acini, l'acino sarà la 7200^{ma} parte della libbra; ma le unità secondarie $5^{o.}\ 7^{d.}\ 2^{t.}\ 9^{a.}$ fanno 3469 acini; perciò fanno $\frac{3469}{7200}$ della libbra.

252. Se poi le unità secondarie volessero ridursi a frazione decimale dell' unità principale, converrà prima ridurle a frazione ordinaria della detta unità, e poi questa si convertirà in decimale. Così p. e. le unità secondarie di poc' anzi volendosi convertire in millesimi di libbra, si troverà che $8^{l.}\ 5^{o.}\ 7^{d.}\ 2^{t.}\ 9^{a.}$ pareggiano libbre 8,481.

RIDUZIONE DI UNA FRAZIONE ORDINARIA O DECIMALE DELL'UNITÀ PRINCIPALE IN NUMERO COMPLESSO.

253. Sia la frazione $\frac{32}{47}$ di canna che voglia convertirsi in parti denominate della stessa, cioè in palmi, once, e minuti.

Poichè ogni frazione equivale al quoziente della divisione in cui il numeratore fa da dividendo e il denominatore fa da divisore, in questo esempio debbonsi dividere 32 canne per 47; ma perchè 32 è minore di 47, ridurremo le canne in palmi moltiplicandole per 8, e poi i 256 palmi che ne risultano si divideranno per 47, e si otterrà per quoziente 5 palmi; ma vi restano altri 21 palmi da dividersi per 47, i quali perciò si ridurranno ad once moltiplicandoli per 12, e le 252 once che ne risultano si divideranno per 47; si otterranno così per quoziente 5 once, ma vi restano altre 17 once da dividersi per 47: quindi esse si ridurranno a minuti moltiplicandole per 5, e gli 85 minuti che n' emergono si divideranno per 47, e poichè si ottiene per quoziente 1 minuto e per resto 38 minuti, i quali divisi per 47 danno $^{38}/_{47}$ di minuto, ne conchiuderemo che la frazione $^{32}/_{47}$ di canna equivale a $5^{p.}\ 5^{o.}\ 1^{m.}\ ^{38}/_{47}$.

32	47
8	$5^{p.}\ 5^{o.}\ 1^{m.}\ ^{38}/_{47}$
256	
21	
12	
252	
17	
5	
85	
38	

254. Se la proposta frazione fosse decimale, allora si convertirebbe facilmente in numero denominato, perchè le divi-

sioni pel denominatore si farebbero distaccando con la virgola tante cifre decimali quanti zeri esso contiene.

Così, se 0,57 di canna debbansi convertire in parti denominate dalla stessa, scrivendo la frazione decimale sotto forma di frazione ordinaria, essa diviene uguale $\frac{57}{100}$; adunque conviene convertire questa frazione in numero denominato come si è fatto nell' esempio precedente, perciò operando come si vede qui affianco, si troverà che 0,57 di canna viene eguale a $4^{p.}\ 6^{o.}\ 3^{m.}$, 6 (*).

$$\begin{array}{r} 57 \\ 8 \\ \hline 4{,}56 \\ 12 \\ \hline 6{,}72 \\ 5 \\ \hline 3{,}60 \end{array}$$

ADDIZIONE DE' NUMERI DENOMINATI.

255. Sieno da addizionarsi $78^{can.}\ 7^{p.}\ 5^{o.}\ 3^{m.}$ con $26^{can.}\ 5^{p.}\ 10^{o.}\ 4^{m.}$ e con $9^{can.}\ 1^{p.}\ 11^{o.}\ 0^{m.}$

Si scrivono i numeri da addizionarsi l'uno sotto l'altro, in modo che le unità della stessa specie corrispondono in una medesima colonna come si scorge qui affianco, e vi si tira una linea al di sotto. Poi si comincia dall' addizionare le unità dell' infima specie che sono i minuti, e daranno per somma 7 minuti i quali fanno 1 oncia e 2 minuti; perciò si scrivono i 2 minuti sotto la linea nella colonna de' minuti, e l'oncia si ritiene per unirla alla colonna delle once. Poi si passa a sommare i numeri della colonna delle once, a' quali si aggiunge l'oncia ritenuta, e si avranno 27 once; ma queste perchè fanno 2 palmi e 3 once, si scrivono le 3 once sotto la colonna delle once, ed i 2 palmi si ritengono per unirli alla colonna de' palmi. Indi si passa ad addizionare i

can.	p.	o.	m.
78	7	5	3
26	5	10	4
9	1	11	0
114	7	3	2

(*) Ecco come riduconsi una nell' altra le due diverse unità di peso di Napoli, cioè il *rotolo* e la *libbra*.

Per ridurre i rotoli in libbre si convertono prima in trappesi moltiplicandoli per 1000, indi dai trappesi che ne risultano si ricavano le once dividendoli per 30, alle quali si aggiungono anche le once date se con i rotoli vi erano unite once; indi dalle once risultanti si ricaveranno le libbre dividendo le once per 12.

Viceversa le libbre si convertono in rotoli riducendole in trappesi, e poi dividendo il risultato per 1000 si otterranno i rotoli.

numeri della colonna de' palmi, a' quali aggiungendo i 2 palmi di ritenuta si avranno per somma 15 palmi ; ma perchè 15 palmi fanno una canna e 7 palmi, si scrivono i 7 palmi sotto la colonna de' palmi, e la canna si ritiene per unirla alla colonna delle canne. Infine si passa ad addizionare i numeri della colonna delle canne, a' quali si aggiunge la canna ritenuta, e si avranno per somma 114 canne; dunque la somma cercata sarà $114^{can.}$ $7^{p.}$ $3^{o.}$ $2^{m.}$

Similmente si opererebbe sopra qualunque altro esempio.

256. Se dovessero addizionarsi i numeri scritti qui affianco, che sono *ore, minuti primi*, e *minuti secondi*, distinti da' segni posti su i medesimi , cioè da un *o* sulle ore , da un *apice* su i primi e da due *apici* su i secondi. Dopo addizionate le unità de' secondi che fanno 21 , si scrive 1 sotto la colonna delle unità , e le 2 decine si uniscono alla colonna delle decine, e si hanno così 15 decine di secondi ; ma siccome ogni 6 decine di secondi fanno 1 primo, si estraggono i primi dividendo 15 per 6 , e si ottengono 2 primi , e 3 decine di secondi che si scrivono al di sotto. Poi si passa ad addizionare la colonna de' primi , a cui si uniscono i 2 primi ottenuti ; e si procederà con la stessa regola praticata per i secondi , cioè si dividerà la somma delle decine de' primi per 6 per ricavarne le ore. Infine si addizioneranno le ore che si troveranno essere 51, dalle quali si estrarranno i giorni dividendole per 24 , e la somma totale si troverà essere $2^{g.}$ $3^{o.}$ $16'$ $31''$.

	$21^{o.}$	$34'$	$46''$
	14	26	58
	15	14	47
$2^{g.}$	$3^{o.}$	$16'$	$31''$

La PROVA delle quattro operazioni su i numeri denominati riposando su gli stessi principii che quella su i numeri interi, potrà eseguirsi della maniera medesima che si operò su questi numeri.

SOTTRAZIONE DE' NUMERI DENOMINATI.

257. Sia p. e. il numero $15^{lib.}$ $8^{o.}$ $21^{t.}$ $5^{a.}$ che deve togliersi dall' altro $29^{lib.}$ $7^{o.}$ $0^{t.}$ $16^{a.}$

Si scrive il numero minore sotto il maggiore in modo che le unità della stessa specie sieno situate l' una sotto l' altra, come si ve-

lib.	o.	t.	a.
29	7	0	16
15	8	21	5
13	10	9	11

dè qui affianco, e vi si tira una linea al di sotto. Poi si comincia la sottrazione dalle unità dell'infima specie, cioè si tolgono i 5 acini da'16 acini, ed il resto 11 si scrive sotto la linea nella colonna degli acini. Indi si passa a togliere i 21 trappesi da zero trappesi, ma non potendosi, ci faremo imprestare un'oncia dalle 7 once, la quale ridotta in trappesi fa 30 trappesi; perciò toglieremo i 21 trappesi da 30 trappesi, ed il resto 9 si scrive sotto la colonna de' trappesi. Poi si passa a togliere le 8 once dalle 6 once che vi sono rimaste, e quindi le 6 once si fanno imprestare una libbra dalle 29 libbre, la quale ridotta in once ed aggiunta alle 6 once, fa 18 once; perciò toglieremo 8 once da 18 once, e si avranno per resto 10 once, che scrivonsi al di sotto. Infine si toglieranno le 15 libbre da 28 libbre, perchè le libbre sono rimaste 28, e si avranno per resto 13 libbre. Dunque il resto cercato sarà $13^{lib.}$ $10^{o.}$ $9^{t.}$ $11^{a.}$

Similmente si opererebbe su qualunque altro esempio.

258. Se da 23^{ore} 5' 36'' si dovessero togliere 18^{ore} 23' 57''; intavolando l'operazione come si vede qui affianco: si dirà: da 16 tolto 7 resta 9 che si scrive al di sotto; ma poi per togliere le 5 decine di secondi dalle due decine che vi sono rimaste, le 2 decine si faranno imprestare un primo da' 5 primi; e perchè un primo fa 6 decine di secondi, le decine di secondi divengono 8, e si dirà: da 8 tolto 5 resta 3 che si scrive al di sotto. Poi da' primi, che sono rimasti 4, si tolgono i 3 primi e resta 1, che si scrive al di sotto. Indi dalle decine de' primi che divengono 6, perchè si fanno imprestare 1 ora che fa 6 decine di primi, si tolgono le 2 decine di primi, e restano 4. Infine dalle ore che sono rimaste 21 si tolgono le 18 ore, e restano 3 ore. Perciò il resto sarà 3° 41' 39''.

22°	05'	36''
18	23	57
3°	41'	39''

MOLTIPLICAZIONE DI UN NUMERO DENOMINATO PER UN INTERO.

259. Sieno, $57^{tes.}\ 5^{pi.}\ 8^{po.}\ 9^{l.}$ da moltiplicarsi per 43.

Si moltiplicheranno separatamente le linee, i pollici, i piedi, e le tese per 43, intavolando l'operazione come si vede qui di contro; e perchè ii prodotto delle 9 linee per 43 è 387 linee, esso contenendo pollici, se n'estrarranno i pollici dividendo le 387 linee per 12; perciò il quoziente 32 che si ottiene dinoterà pollici, ed il resto 3 dinoterà linee. Poi i 32 pollici si aggiungono al prodotto degli 8 pollici per 43, che è 344, e si avranno così 376 pollici, i quali contenendo piedi, se n'estrarranno i piedi dividendoli per 12, laonde il quoziente 31 che ne risulta dinoterà piedi, ed il resto 4 dinoterà pollici. Indi i 31 piedi si aggiungeranno al prodotto de' 5 piedi per 43, che è 215, e si avranno 246 piedi, i quali contenendo tese se n'estrarranno le tese dividendoli per 6; il quoziente 41 che si ottiene dinoterà tese, e vi restano zero piedi. Infine le 41 tese si aggiungeranno al prodotto delle 57 tese per 43, che è 2451, e si avranno per somma 2492 tese; laonde il prodotto cercato sarà $2492^{te.}\ 0^{pi.}\ 4^{po.}\ 3^{li.}$.

te.	pi.	p.	l.
57	5	8	9
43	43		
171	387	12	
228	32	3	
2451	344		
41	376	12	
2492	31	4	
	215		
	246	6	
	41	0	

MOLTIPLICAZIONE DI UN N.° DENOMINATO PER UN DENOMINATO.

260. Sieno p. e. da moltiplicarsi $9^{lir.}\ 15^{s.}\ 8^{d.}$ per $7^{tes.}\ 4^{pi.}\ 5^{po.}\ 2^{li.}$ Si ridurrà il moltiplicando ad unità dell'infima specie, cioè le lire, i soldi, ed i danari, si ridurranno a danari, e ne risulteranno 2348 danari. Poi il moltiplicatore si ridurrà a numero astratto, e viene uguale a $7\frac{638}{864}$. Perciò l'operazione si riduce a moltiplicare 2348 danari per $7\frac{638}{864}$; e moltiplicando prima 2348 per 7 si avranno 16436 danari; e poi moltiplicando 2348 per $\frac{638}{864}$, si avrà la frazione $\frac{1498024}{864}$ di

danaro, che pareggia danari 1733 $^{89}/_{108}$. Indi si aggiungono questi danari a' 16436 danari che formano l' altra parte del prodotto, e si troverà che il prodotto cercato equivale a danari 18169 $^{89}/_{108}$, da cui si ricaveranno le unità delle specie superiori; e si ridurrà infine a $75^{lib.}$ $14^{s.}$ $1^{d.}$ $^{89}/_{108}$.

Se occorresse moltiplicare un numero intero per un numero denominato; il moltiplicatore si ridurrà a numero astratto come nell' esempio precedente, e si eseguirà la moltiplicazione. E siccome il prodotto deve essere della stessa natura del moltiplicando, e si compone di una parte intera e di una parte fratta; se il moltiplicando è un numero complesso, converrà ridurre anche la parte fratta del prodotto in numero complesso.

261. Suole anche farsi la moltiplicazione de' numeri denominati col così detto metodo delle *parti aliquote* ovvero metodo *di prendere in parti* il quale non solo serve tante volte per giungere più brevemente al risultato, allorchè siasi bene esercitato in questa maniera di calcolare, ma è utile ancora per aguzzare l' ingegno de' giovanetti.

Così, per esempio, se un artefice avendo fatto $18^{can.}$ $7^{p.}$ $5^{o.}$ $4^{m.}$ di lavoro in un giorno, si domandasse che quantità di lavoro farà in 56 giorni; è chiaro che si arriverà a conoscere la cercata quantità di lavoro moltiplicando quello fatto in un giorno per 56. Per eseguire tale moltiplicazione col metodo di prendere in parti, si comincerà dal moltiplicare le 18 canne per 56, ed i prodotti parziali 108 e 90 si lasciano senza sommarli, come si scorge qui a fianco. Poi

		can.	*p.*	*o.*	*m.*
		18	7	5	4
		56			
		108			
		90			
Per	4 pal.	28			
	2 pal.	14			
	1 pal.	7			
	4 onc.	2	2	8	
	1 onc.	0	4	8	
	4 min.	0	3	8	4
		1060	3	0	4

si passerà a moltiplicare i 7 palmi per 56; ma questa moltiplicazione si farà per parti, cioè si divideranno i 7 palmi in più parti ciascuna delle quali sia aliquota dell' unità principale; perciò si ripartiranno i 7 palmi in 4 palmi più 2 palmi più 1 palmo; e queste parti de' 7 palmi si moltiplicheranno separatamente per 56. Ma, affin di eseguire il prodotto di 4 palmi per 56, si rifletterà che una canna moltiplicata per 56 dando per prodotto 56 canne, 4 palmi che sono la metà di una canna daranno per prodotto la metà di 56 canne, cioè daranno 28 canne; perciò il prodotto di 4 palmi per 56, che è 28, si scrive nella colonna delle canne. Poi si moltiplicheranno i 2 palmi per 56; ma perchè 2 palmi sono la metà di 4 palmi, si avrà un prodotto uguale alla metà del precedente, cioè si avranno 14 canne, che si scriveranno sotto al prodotto precedente, cioè sotto a 28 canne. Indi si moltiplicherà 1 palmo per 56, ed è chiaro che dovrà pure aversi un prodotto uguale alla metà del precedente, cioè si avranno 7 canne che si scrivono sotto al prodotto 14.

Poi si passerà a moltiplicare le 5 once per 56, e qui pure converrà dividere le 5 once in parti che sieno aliquote dell' unità della specie superiore, cioè del palmo; perciò le ripartiremo in 4 once più 1 oncia, e passeremo a moltiplicare prima le 4 once, e poi l' oncia per 56. Ma nel moltiplicare le 4 once per 56, riflettiamo che siccome 1 palmo moltiplicato per 56 dà per prodotto 7 canne, 4 once le quali sono un terzo del palmo daranno un terzo di 7 canne, cioè $2^{can.}\ 2^{p.}\ 8^{o.}$. Poi si moltiplicherà 1 oncia per 56, ed è chiaro che si avrà un prodotto uguale ad un quarto del precedente, cioè $0^{can.}\ 4^{p.}\ 8^{o.}$.

Infine si passerà a moltiplicare i 4 minuti per 56; e poichè scorgiamo che 4 minuti sono la quinta parte di 20 minuti, ossia di 4 once, ne segue che per avere il prodotto di 4 minuti per 56 basterà prendere un quinto del prodotto per 4 once; perciò si avranno $3^{pal.}\ 8^{on.}\ 4^{mi.}$ Sommando ora tutti i prodotti parziali ottenuti, si avrà per prodotto totale $1060^{can.}\ 3^{pa.}\ 0^{on.}\ 4^{mi.}$

262. Sia ora da moltiplicarsi un numero denominato per un altro numero denominato col metodo di prendere in parti. Così, per esempio, se voglia conoscersi quante canne, palmi, once, e minuti di un certo lavoro farà un artefice in 56 giorni 15 ore e 40 minuti primi, conoscendosi che in un giorno fa 18 canne 7 palmi 5 once e 4 minuti del detto lavoro. È manifesto

		can.	p.	o.	m.
		18	7	5	4
		gior.	or.	mi.	
		56	15	40	
		can.	pa.	on.	m.
per	56 gi.	1060	3	0	4
	12 or.	9	3	8	4 1/2
	3 or.	2	2	11	1 1/8
	1 or.	*0*	*6*	*3*	*3 17/24*
	30 m.	0	3	1	4 17/48
	10 m.	0	1	0	3 17/144
	Toiale	1072	5	11	2 7/72

che per trovare il lavoro che l' artefice fa in $5^{g.}\ 15^{o.}\ 40'$ dovrà moltiplicarsi quello che fa in un giorno pel numero 56 dei giorni, e per le date frazioni del giorno che sono $15^{o}\ 40'$. Or poichè abbiamo già fatto nell' esempio precedente il prodotto del lavoro di un giorno per 56, faremo qui vedere come possa farsi il prodotto dal detto lavoro per le frazioni del giorno, cioè per 15^{o} e $40'$. Per giungervi, convien dividere le ore in parti aliquote del giorno, ed i minuti primi in parti aliquote dell' ora, eseguendo le operazioni come si vede qui a fianco; e si scorge facilmente che giova ripartire le 15 ore in 12 ore più 3 ore; perchè 12 ore essendo la metà del giorno, si avrà un prodotto metà di quello che si ottiene moltiplicando il numero proposto per 1 giorno; e poichè il prodotto per 1 giorno è $18^{can.}\ 7^{p.}\ 5^{o.}\ 4^{m.}$, quello per 12 ore sarà $9^{can.}\ 3^{p.}\ 8^{o.}\ 4^{m.}\ 1/_{2}$. Poi si farà la moltiplicazione per 3 ore, le quali essendo un quarto di 12 ore, si avrà il prodotto prendendo un quarto del precedente, che perciò sarà $2^{can.}\ 2^{p.}\ 11^{o.}\ 1^{m.}\ 1/_{8}$.

Indi si farà la moltiplicazione per 40 minuti primi, e gioverà ripartire questi minuti primi in 30 minuti più 10 minuti, perchè 30 minuti essendo la metà di 1 ora, si avrà un prodotto metà di quello che si ottiene moltiplicando il numero proposto per 1 ora, e prendendone po-

scia la terza parte, si avrà il prodotto per 10 minuti. Or siccome fra i prodotti precedenti non vi è quello per 1 ora, bisognerà prima formarselo, perciò un tal prodotto si chiama *prodotto ausiliare*, e si formerà facilmente prendendo un terzo di quello per 3 ore, quindi ne risulterà per prodotto ausiliare $0^{can.}\ 6^{p.}\ 3^{o.}\ 3^{m.}\ {}^{17}/_{24}$, del quale prendendone la metà, e poi il terzo della metà, si avranno i prodotti per 30 minuti e per 10 minuti, i quali saranno rispettivamente $0^{can.}\ 3^{p.}\ 1^{o.}\ 4^{m.}\ {}^{17}/_{48}$, e $0^{can.}\ 1^{p.}\ 0^{o.}\ 3^{m.}\ {}^{17}/_{144}$. Infine sommando tutti questi prodotti parziali ottenuti, rammentandosi che non si deve tener conto del prodotto ausiliare, che perciò l'abbiamo scritto in corsivo (*), si avrà il prodotto totale $1072^{can.}\ 5^{p.}\ 11^{o.}\ 2^{m.}\ {}^{7}/_{72}$.

DIVISIONE DI UN N.° DENOMINATO PER UN N.° INTERO.

263. Sieno p. e. da dividersi $77^{libbre}\ 9^{o.}\ 13^{t.}\ 11^{a.}$ per 21.

Si comincerà dal dividere le 77 libbre per 24, intavolando l'operazione come si vede qui di contro, e si avranno per quoziente 3 libbre; ma vi restano 5 libbre da dividersi per 24, le quali, affin di poter eseguire la divisione, si ridurranno ad once moltiplicandole per 12, ed

lib.	o.	t.	a.	
77	9	13	15	24
5		643		lib. 3 o. 2 p. 26 a. 16 $^{11}/_{24}$
12		163		
69		19		
21		20		
30		380		
630		15		
13		395		
		155		
		11		

al prodotto si aggiungeranno le 9 once, e si otterranno 69 once; poi queste 69 once si divideranno per 24; ma vi restano 21 once da dividersi per 25, che perciò affin di poter eseguire la divisione, si ridurranno a trappesi moltiplicandole per 30, e si otterranno 630 trappesi, a' quali aggiungendo i 13 trappesi si avranno 643 trappesi. Indi si divideranno questi trappesi per 24, e si avranno per quoziente 26 trappesi; ma vi restano 19 trappesi da dividersi per 24, i quali perciò si convertiranno in acini moltiplicandoli per 20, e ne risulteranno 380 acini a cui aggiungendo i 15 acini, si avranno 395 acini. Infine si divideranno questi 395 acini per 24, e si otterranno per quoziente $16^{ac.}\ {}^{11}/_{24}$. Perciò il quoziente cercato sarà $3^{lib.}\ 2^{o.}\ 26^{t.}\ 16^{a.}\ {}^{11}/_{24}$.

(*) Nella pratica i numeri che compongono il prodotto ausiliare si scrivono con un tratto al disopra, per indicare che non deve tenersene conto nel fare l'addizione.

DIVISIONE DI UN N.° DENOMINATO PER UN N.° DENOMINATO.

264. Dovendosi dividere un numero denominato per un altro numero denominato, si ridurranno ambedue a numeri astratti, e poi si eseguirà la divisione. Ma è da notarsi che il quoziente il quale si ottiene sarà un numero astratto se nel fare la divisione si è avuto per fine di trovare un numero che esprime quanto è il dividendo rispetto al divisore ; che se poi si è avuto in mira di trovare un numero il quale moltiplicato pel divisore considerato come astratto debba produrre il dividendo , il quoziente sarà un numero concreto della stessa natura del dividendo.

Così p. e. se debbansi dividere $30^{lire}\ 4^{s.}\ 8^{d.}$ per $24^{tese}\ 5^{pi.}\ 3^{po.}\ 7^{l.}$ (*). Convertiamo i numeri proposti in astratti, lasciando decomposti i denominatori in fattori , affinchè sieno visibili i fattori comuni per sopprimerli prima di moltiplicare il dividendo pel divisore capovolto. Così operando su i numeri proposti, si riduce a dividere $\frac{7256}{20.12}$ per $\frac{21499}{6.12.12}$, e sopprimendo i fattori 12 e 4 comuni ai denominatori, il quoziente sarà $\frac{7256\times6\times3}{5\times21499}=\frac{130608}{107495}=1\frac{23113}{107495}$. Questo quoziente si farebbe rimanere così, se dovesse essere un numero astratto ; ma se deve esser concreto , si riduce a numero denominato della stessa natura del dividendo ; e perciò viene eguale ad $1^{lir.}\ 4^{s.}\ 3^{d.}\frac{64875}{107495}$.

Potrebbe anche farsi la divisione col metodo di prendere in parti, cioè riducendo il solo divisore ad una frazione astratta , e poi moltiplicando il dividendo per questa frazione rovesciata; e ciò si farà moltiplicando il dividendo pel denominatore della frazione col metodo di prendere in parti , e poi si dividerà con lo stesso metodo il prodotto pel numeratore della frazione.

265. *Avvertimento.* Facciamo notare che quando si fa uso di proporzioni per risolvere i problemi , invece di adoperare

(*) Questo esempio potrebbe corrispondere alla seguente quistione: Trovare il prezzo di una tesa di una certa mercanzia, conoscendosi che $24^{tese}\ 5^{pi.}\ 3^{po.}\ 7^{l.}$ si sono pagate $30^{lir.}\ 4^{s.}\ 8^{d.}$?

i metodi esposti per la moltiplicazione e la divisione de' numeri denominati, sogliono ridursi questi numeri in unità dell' infima specie, come vedremo in seguito; e poi si eseguono le operazioni su i numeri che rappresentano queste unità. E siccome il risultato deve esprimere unità dell' infima specie di quella natura che la quistione esige, si estraggano infine da queste unità quelle delle specie superiori.

CAP. VIII.

RAGIONI E PROPORZIONI.

266. Due numeri possono paragonarsi fra loro per due diversi fini, cioè, o per vedere di quanto uno differisce dall' altro, o per vedere come uno si compone per mezzo dell' altro.

Allorchè due numeri si paragonano fra loro per vedere di quanto uno differisce dall' altro, il risultato di questo paragone viene espresso dalla loro differenza, e si chiama *ragione* o *rapporto aritmetico* fra i due numeri.

Allorchè due numeri si paragonano fra loro per vedere come uno si compone per mezzo dell' altro, il risultato di questo paragone viene espresso dal quoziente di uno diviso per l' altro, e si chiama *ragione* o *rapporto geometrico* fra i due numeri, ed anche più semplicemente *ragione* o *rapporto*.

Dunque in breve:

La *ragione aritmetica* fra due numeri è la loro differenza; e la *ragione geometrica* è il quoziente di uno diviso per l'altro. Così p. e. la ragione aritmetica di 9 a 4 è $9-4$, ossia 5; e la ragione geometrica di 6 a 2 è $6:2$, ossia 3.

Tanto nella ragione aritmetica quanto nella geometrica i due numeri che si paragonano si chiamano *termini* della ragione; ed in particolare quello che si scrive prima si chiama *antecedente*, e quello che si scrive dopo si chiama *conseguente*. Così p. e. nella ragione aritmetica di 9 a 4, l' antecedente è 9, ed il conseguente è 4; e nella ragione geometrica di 6 a 2, l' antecedente è 6, ed il conseguente è 2.

267. L' eguaglianza di due ragioni aritmetiche si chiama

proporzione aritmetica ovvero *equidifferenza*. Così p. e. la ragione aritmetica di 11 a 9 essendo uguale a quella di 7 a 5, per essere $11-9=7-5$, queste due ragioni uguali costituiscono una proporzione aritmetica, ed i quattro numeri 11, 9, 7, 5 diconsi essere in *proporzione aritmetica* ovvero *aritmeticamente proporzionali*. Dunque quattro numeri sono aritmeticamente proporzionali, allorchè la differenza fra il primo ed il secondo è uguale a quella fra il terzo e il quarto.

Per indicare che i quattro numeri 11, 9, 7, 5 sono in proporzione aritmetica, si scrivono nel seguente modo 11.9:7.5; e si leggono *11 sta a 9 come 7 sta a 5*.

268. L'eguaglianza di due ragioni geometriche si chiama *proporzione geometrica*, o semplicemente *proporzione*. Così p. e. la ragione di 6 a 2 essendo uguale a quella di 12 a 4, perchè 6 diviso per 2 è uguale a 12 diviso per 4, queste due ragioni uguali costituiscono una proporzione, ed i quattro numeri 6, 2, 12, 4 diconsi essere *in proporzione*, o *proporzionali*.

Dunque quattro numeri sono in *proporzione*, allorchè il primo diviso pel secondo pareggia il terzo diviso pel quarto.

Per indicare che i quattro numeri 5, 2, 12, e 4 sono in proporzione, si scrivono nel seguente modo 6 : 2 : : 12 : 4, ovvero $6 : 2 = 12 : 4$, e leggonsi *6 sta 2 come 12 sta a 4*.

269. Il primo ed il quarto termine di una proporzione, sia aritmetica, sia geometrica, si chiamano *termini estremi*; ed il secondo e terzo si chiamano *termini medii*; l' ultimo poi si chiama *quarto proporzionale*.

270. Allorchè i termini medii di una proporzione aritmetica o geometrica sono uguali, la proporzione si dice *continua* (*); e perchè in tal caso i termini diversi riduconsi a tre, quello di mezzo si chiama *medio* proporzionale, e l' ultimo si chiama *terzo* proporzionale. Così p. e. la proporzione aritmetica 9.7:7.5 è continua; e la proporzione geometrica 8:4::4:2 è pure continua.

Per indicare poi che i tre numeri 9, 7, 5 sono in proporzione aritmetica continua, si scrivono nel seguente modo ÷9.7.5, leggendosi *9 sta a 7 come 7 sta a 5*. E per indicare

(*) Usavasi chiamar *discreta* o *discontinua* quella con i termini medii diseguali.

che i tre numeri 8, 4, 2 sono in proporzione geometrica continua si scrivono ∺ 8 : 4 : 2, leggendosi *8 sta a 4 come 4 sta a 2.*

271. Siccome una qualsiasi quantità, che dinotiamo con a, è uguale ad $\frac{a}{1}$, cioè rappresenta il rapporto che essa serba all' unità; reciprocamente il rapporto dell' unità ad a sarà $\frac{1}{a}$; perciò la ragione di $1 : a$ si dice *inversa* o *reciproca* di quella di $a : 1$. Così p. e. la ragione di 5 : 3 sarà *inversa* di quella di 3 : 5, perchè la prima ragione è $\frac{5}{3}$, la seconda è $1 : \frac{5}{3}$, ossia $\frac{3}{5}$.

Dunque la ragione del conseguente all' antecedente è inversa di quella dell' antecedente al conseguente.

Similmente due numeri diconsi *reciproci* o *inversi* l' uno dall' altro, quando il primo essendo a, l' altro è $\frac{1}{a}$. È chiaro poi che il prodotto di questi due numeri è uguale all' unità.

272. Quella ragione che risulta dal moltiplicare fra loro più ragioni geometriche, si dice *composta* da queste. Or poichè moltiplicando più ragioni, la ragione che ne nasce ha per antecedente il prodotto degli antecedenti, e per conseguente il prodotto de' conseguenti, ne segue che la ragione composta da altre ragioni avrà per antecedente il prodotto degli antecedenti, e per conseguente il prodotto de' conseguenti. Così p. e. avendosi le ragioni di 5 : 2, di 3 : 8, e di 4 : 7, la loro composta sarà quella di $5 \times 3 \times 4 : 2 \times 8 \times 7$, ossia di 60 : 112.

La ragione composta da due ragioni, una inversa dell' altra, ha l' antecedente uguale al conseguente; perchè il prodotto delle ragioni componenti dovendo eguagliare l' unità, ciò non potrebbe avvenire se l' antecedente non fosse eguale al conseguente.

Per indicare che una ragione è composta da più altre, si mettono in parentesi tutte le ragioni componenti, affin di risvegliare l' idea che dal loro prodotto ne nasce la composta. Così la ragione di 60 : 112 essendo composta dalle ragioni di 5 : 2, di 3 : 8, e di 4 : 7, si scriverà 60 : 112 : : (5 : 2) (3 : 8) (4 : 7), e si leggerà *60 sta a 112 in ragion composta di 5 a 2, di 3 ad 8, e di 4 a 7.*

PROPRIETÀ DELLA RAGIONE E DELLA PROPORZIONE ARITMETICA.

273. *La ragione aritmetica fra due numeri non cambia, se ad essi si aggiunge o toglie il medesimo numero.*

Dim. Difatti, la ragione aritmetica fra due numeri essendo la loro differenza, sappiamo che la differenza fra due numeri non cambia, tanto se si aggiunge quanto se si toglie ad essi la medesima quantità.

Così p. e. la ragione aritmetica di 7 a 5 essendo 2, aggiungendo 4 tanto a 7 quanto a 5, ne vengono i numeri 11 e 9, e la ragione aritmetica fra questi numeri è anche 2.

274. *Nella proporzione aritmetica la somma dei termini estremi pareggia quella de' termini medii.*

Sia la proporzione aritmetica $8.5:7.4$; dico che si avrà $8+4=5+7$.

Dim. I quattro numeri 8, 5, 7, 4 essendo in proporzione aritmetica, dovrà essere $8-5=7-4$; ed aggiungendo all'una ed all'altra di queste grandezze uguali il secondo è quarto termine, ne verrà $8-5+5+4=7-4+5+4$; ma poichè $5-5=0$, e $4-4=0$, ne risulterà $8+4=5+7$; e quindi la somma de'termini estremi è uguale a quella de' termini medii.

Se gli antecedenti fossero minori de'conseguenti, come avviene nella proporzione $6.10:5.9$, allora, poichè $10-6=9-5$, aggiungendo a queste due grandezze uguali il primo e terzo termine, ne verrà $10=6+6+5=9-5+6+5$, che si riduce a $10+5=9+6$; laonde la somma de' termini estremi pareggia quella de' termini medii.

È chiaro poi che quando la proporzione è continua *la somma degli estremi viene uguale al doppio del termine medio.* Così p. e. nella proporzione aritmetica continua $7.5:5.3$, si avrà $7+3=5+5=10$.

275. *Se quattro numeri sono tali, che la somma degli estremi pareggia quella de' medii, i quattro numeri saranno in proporzione aritmetica.*

Sieno, per esempio, i quattro numeri 11, 8, 5, 2, tali che si abbia $11+2=8+5$: dico che starà $11.8:5.2$.

Dim. Difatti, essendo per ipotesi $11+2=8+5$, togliendo da queste due grandezze uguali il secondo e quarto numero, ne verrà $11+2-8-2=8+5-8-2$, ossia $11-8=5-2$; e quindi $11.8:5.2$.

Quando poi tre numeri sono tali che la somma de' termini estremi pareggia il doppio del termine medio, essi allora formano una proporzione aritmetica continua.

Così p. e. avendosi tre numeri 10, 7, 4 tali che $10+4=7+7$, questi tre numeri saranno in proporzione aritmetica continua, cioè si avrà $\div 10.7.4$.

276. Il teorema enunciato nel numero precedente può anche enunciarsi indipendentemente dall'ordine come sono disposti i quattro numeri, dicendosi: *Se la somma di due numeri pareggia quella di due altri numeri, i quattro numeri costituiscono una proporzione aritmetica, potendosi prendere indifferentemente i due primi per termini estremi, ed i due secondi per termini medii*. In tal guisa potranno farsi otto combinazioni differenti, e si avranno otto proporzioni aritmetiche. Così, per esempio, avendosi $5+3=6+2$; prendendo 5 e 3 per termini estremi, si avranno le quattro proporzioni

$$5.6:2.3, \quad 3.6:2.5,$$
$$5.2:6.3, \quad 3.2:6.5;$$

e prendendo 5 e 3 per termini medii, si avranno le quattro proporzioni

$$6.5:3.2, \quad 2.5:3.6,$$
$$6.3:5.2, \quad 2.3:5.6.$$

L'esistenza di queste otto proporzioni si dimostra sempre con togliere dalle due grandezze che si sono supposte eguali, quei termini che si pongono al secondo e quarto posto.

277. *Allorchè si conoscono tre termini di una proporzione aritmetica si può trovare il quarto ; e questo , se è termine estremo, si trova sommando i medii e togliendo dalla somma l'altro estremo; e se è termine medio, si trova sommando gli estremi e togliendo dalla somma l'altro medio.*

Sia p. e. la proporzione aritmetica $8.5:7:x$, ove è incognito un termine estremo, che abbiamo indicato con x, si avrà $x=5+7-8=4$.

Dim. In effetti, i quattro numeri 8, 5, 7, x essendo in proporzione aritmetica, sarà la somma de' termini estremi eguale a quella de' medii, cioè si avrà $x+8=5+7$; e togliendo dall'una e dall'altra di queste grandezze uguali l'estremo cognito, che è 8, ne verrà $x+8-8=5+7-8$, ossia $x=5+7-8=4$. Dunque il termine estremo x si ottiene sommando i medii 5 e 7, e togliendo dalla somma 12 l'altro estremo 8.

Se poi il termine incognito fosse uno de' medii , come avviene nella proporzione $6.x:3.7$, si avrà similmente $x+3=6+7$; e togliendo dall'una e dall'altra di queste grandez-

ze uguali l'altro medio 3, ne verrà $x+3-3=6+7-3$, ossia $x=6+7-3=10$.

Nella proporzione aritmetica continua, la somma degli estremi essendo uguale al doppio del termine medio, *un termine estremo si trova raddoppiando il medio, e togliendone l'altro estremo; ed il medio si ottiene sommando gli estremi, e prendendo la metà della somma.*

PROPRIETA' DELLA RAGIONE E DELLA PROPORZIONE GEOMETRICA.

278. *Una ragione non si altera se si moltiplicano e si dividono i suoi termini per lo stesso numero.*

Perchè la ragione essendo eguale al quoziente che si ottiene col dividere l'antecedente pel conseguente, sappiamo che il quoziente di una divisione non cambia se si moltiplicano o dividono il dividendo ed il divisore per lo stesso numero.

279. *In ogni proporzione il prodotto de' termini estremi pareggia quello de' termini medii.*

Sia p. e. la proporzione $5:3::10:6$. Si avrà $5\times6=3\times10$.

Dim. In effetti, i quattro numeri 5, 3, 10, e 6 essendo in proporzione, si avrà $\frac{5}{3}=\frac{10}{6}$; e moltiplicando queste frazioni eguali pel prodotto del secondo e quarto termine della proporzione, ne viene $\frac{5\times3\times6}{3}=\frac{10\times3\times6}{6}$; e sopprimendo il fattore 3 comune a' due termini della prima frazione, ed il fattore 6 comune ai due della seconda, ne risulta $5\times6=10\times3$; onde si vede che il prodotto de' termini estremi pareggia quello de' termini medii.

Nella proporzione continua il prodotto de' termini estremi essendo uguale al termine medio moltiplicato per sè stesso, ed il prodotto di un numero per sè stesso chiamandosi *quadrato* di esso numero, ne segue che *il prodotto de' termini estremi pareggia il quadrato del termine medio.*

280. *Se quattro numeri sono tali che il prodotto degli estremi pareggia quello dei medii, i quattro numeri saranno in proporzione.*

Sieno p. e. i quattro numeri 10, 8, 5, 4, tali che abbiasi $10\times4=8\times5$; dico che essi saranno in proporzione, e si avrà

$$10:8::5:4.$$

Dim. Essendo per ipotesi $10 \times 4 = 8 \times 5$, dividendo queste due grandezze uguali pel prodotto del secondo e quarto dei numeri dati, si avrà $\frac{10 \times 4}{8 \times 4} = \frac{8 \times 5}{8 \times 4}$; e sopprimendo i fattori 4 ed 8 che sono rispettivamente comuni a' termini della prima e della seconda frazione, ne verrà $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$; e però $10 : 8 :: 5 : 4$.

Quando poi tre numeri sono tali che il prodotto de' termini estremi pareggia il quadrato dal termine medio, i tre numeri formano una proporzione continua. Così p. e. i tre numeri 8, 4, 2, essendo tali che $8 \times 2 = 4 \times 4$, essi sono in proporzione continua, cioè si avrà $\div 8 : 4 : 2$.

281. Qui pure come nel n.° 276 possiamo enunciare il precedente teorema nel seguente modo: *Se il prodotto di due numeri pareggia quello di due altri numeri, i quattro numeri formano una proporzione; potendosi prendere indifferentemente i due fattori di un prodotto come termini estremi, ed i due fattori dell' altro come termini medii.*

Così p. e. essendo $10 \times 4 = 8 \times 5$, prendendo 10 e 4 per termini estremi, si avranno le quattro proporzioni

$$10 : 8 :: 5 : 4, \quad 4 : 8 :: 5 : 10,$$
$$10 : 5 :: 8 : 4, \quad 4 : 5 :: 8 : 10;$$

e prendendo 10 e 4 per termini medii, si avranno le quattro proporzioni

$$8 : 10 :: 4 : 5, \quad 5 : 10 :: 4 : 8,$$
$$8 : 4 :: 10 : 5, \quad 5 : 4 :: 10 : 8.$$

L' esistenza di queste otto proporzioni si dimostra sempre con dividere le due grandezze che si sono supposte uguali pel prodotto di quei termini che si pongono al secondo e quarto posto.

282. *Allorchè si conoscono tre termini di una proporzione, si può trovare il quarto: e questo, se è termine estremo, si trova moltiplicando i medii e dividendo il prodotto per l' altro estremo; e se è termine medio si ottiene moltiplicando gli estremi, e dividendo il prodotto per l' altro medio.*

Sia p. e. la proporzione $10 : 8 :: 5 : x$, nella quale è incognito il quarto termine che abbiamo indicato con x; si avrà

$$x = \frac{5 \times 8}{10} = \frac{40}{10} = 4.$$

Dim. In effetti i quattro numeri 10, 8, 5, x essendo in proporzione, il prodotto de' termini estremi sarà uguale a quello de' termini medii; quindi si avrà $x \times 10 = 8 \times 5$, e dividendo l' una e l' altra di queste grandezze uguali per l' e-

stremo cognito, che è 10, ne verrà $x = \frac{8 \times 5}{10}$; perciò l'estremo x si ottiene facendo il prodotto de' medii, e dividendolo per l'altro estremo.

Se poi il termine incognito fosse uno de' medii, come avviene nella proporzione $10 : x :: 5 : 4$; allora, essendo $x \times 5 = 10 \times 4$, dividendo queste due grandezze uguali per l'altro medio, ne verrà $x = \frac{10 \times 4}{5}$; cioè, il medio x è uguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio 8.

Nella proporzione continua il prodotto de' termini estremi essendo uguale al quadrato del termine medio, *un termine estremo si trova facendo il quadrato del medio e dividendolo per l'altro estremo; ed il termine medio si trova facendo il prodotto degli estremi, e prendendone la radice quadrata.*

Vedremo in appresso come trovare la radice quadrata di un dato numero.

283. I termini di una proporzione sogliono cambiarsi di posto, ed anche combinarsi fra loro per via di somma, di sottrazione, di moltiplicazione, o di divisione in modo da risultarne una nuova proporzione. A quattro di questi cambiamenti o combinazioni che più spesso occorrono, si danno i seguenti nomi.

Si dice *invertendo* quando in una proporzione i conseguenti si fanno passare nel posto de' rispettivi antecedenti, e questi in quello de' rispettivi conseguenti.

Si dice *permutando* allorchè l'antecedente della prima ragione si paragona a quello della seconda, ed il conseguente della prima a quello della seconda.

Si dice *componendo* allorchè la somma dell'antecedente e conseguente di ciascun rapporto si paragona al medesimo conseguente, o al medesimo antecedente.

Dicesi *dividendo* quando la differenza fra l'antecedente e il conseguente di ciascun rapporto si paragona al rispettivo conseguente, o al rispettivo antecedente (*).

(*) Le diverse maniere di combinare i termini di una proporzione dagli antichi dicevansi: *modi di argomentare in proporzione.*

N. B. In questo capitolo riguardiamo i termini di una proporzione come numeri astratti, e perciò è sempre permesso di sommare, sottrarre, e paragonarli fra loro; ma se le quantità da' medesimi rappresentate dovessero riguardarsi come concrete, non sarebbe permesso fare quei cambiamenti dove avviene somma, sottrazione, o paragone di quantità eterogenee; potendo questi cambiamenti farsi solamente allorchè le quantità sono omogenee.

284. *Se quattro numeri sono in proporzione*, invertendo o permutando *saranno ancora in proporzione.*

Sia p. e. la proporzione $14 : 8 :: 7 : 4$; dico che invertendo si avrà $8 : 14 :: 4 : 7$; e permutando si avrà $14 : 7 :: 8 : 4$.

Dim. Difatti, affinchè sia $8 : 14 :: 4 : 7$, e $14 : 7 :: 8 : 4$, dovrebbe essere $8 \times 7 = 14 \times 4$; ma ciò è vero, perchè essendo per ipotesi $14 : 8 :: 7 : 4$, il prodotto 14×4 degli estremi è uguale al prodotto 8×7 de' medii; dunque è anche vero che se quattro numeri sono in proporzione, invertendo o permutando saranno pure in proporzione.

285. *Se quattro numeri sono in proporzione*, componendo o dividendo *saranno pure in proporzione.*

Sia la proporzione $15 : 6 :: 5 : 2$.

Dico che componendo e dividendo si avrà

$$15 + 6 : 6 :: 5 + 2 : 2, \quad \text{e} \quad 15 - 6 : 6 :: 5 - 2 : 2.$$

Dim. In effetti, per essere i quattro numeri 15, 6, 5, 2 in proporzione, si ha $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$; ed aggiungendo al primo ed al secondo membro l'unità, che perciò nel primo la scriviamo sotto forma frazionaria che abbia per denominatore 6, e nel secondo sotto forma frazionaria che abbia per denominatore 2, verrà

$$\frac{15}{6} + \frac{6}{6} = \frac{5}{2} + \frac{2}{2}; \text{ ossia } \frac{15+6}{6} = \frac{5+2}{2}; \text{ cioè } 15+6 : 6 :: 5+2 : 2.$$

Togliendo poi dai due membri l'unità, verrà

$$\frac{15}{6} - \frac{6}{6} = \frac{5}{2} - \frac{2}{2}, \text{ ovvero } \frac{15-6}{6} = \frac{5-2}{2},$$

cioè $$15 - 6 : 6 :: 5 - 2 : 2.$$

Se poi la proporzione avesse gli antecedenti minori de' rispettivi conseguenti, come avviene nella proporzione $3 : 8 :: 9 : 24$,

allora si opererà al contrario, cioè le due frazioni uguali si toglieranno dall'unità, e si avrà

$$\frac{8}{8}-\frac{3}{8}=\frac{24}{24}-\frac{9}{24}, \text{ ovvero } \frac{8-3}{8}=\frac{24-9}{24},$$

e quindi $8-3:8::24-9:24$.

Quando poi si volesse paragonare la somma o la differenza fra l'antecedente e conseguente al medesimo antecedente, s'invertirà la proporzione, e si procederà similmente.

286. *Se in una proporzione si moltiplicano o si dividono gli antecedenti o i conseguenti per lo stesso numero, ne risulta una nuova proporzione.*

Perchè ciò equivale a moltiplicare o a dividere per lo stesso numero le due frazioni uguali, che esprimono i due rapporti della proporzione.

287. *In una proporzione la somma o differenza degli antecedenti sta alla somma o differenza de' conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente.*

Sia p. e. la proporzione $12:3::8:2$. Dico che si avrà

$$12+8:3+2::12:3, \text{ e } 12-8:3-2::12:3.$$

Dim. Difatti, nel primo caso, essendo $12:3::8:2$; permutando ne verrà $12:8::3:2$; e componendo si avrà $12+8:8::3+2:2$; e di nuovo permutando, ne verrà $12+8:3+2::8:2$. Nel secondo caso si opera similmente, ma solo invece del componendo si farà il dividendo.

288. *In una serie di rapporti uguali, la somma degli antecedenti sta a quella de' conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.*

Sieno p. e. i tre rapporti uguali $12:3$, $8:2$, $20:5$.

Dico che si avrà $12+8+20:3+2+5::12:3$.

Dim. In effetti, essendo $12:3::8:2$, pel teorema precedente si avrà $12+8:3+2::8:2$, e sostituendo alla ragione di $8:2$ quella di $20:5$ che l'è uguale, si avrà $12+8:3+2::20:5$; laonde, per lo stesso teorema, ne verrà $12+8+20:3+2+5::20:5::8:2::12::3$.

N. B. Questo teorema non è che il primo di quelli del n.° 184, diversamente enunciato.

289. *Se si hanno più proporzioni e si moltiplicano i termini della prima per i corrispondenti della seconda, i prodotti saranno in proporzione.*

Sieno primieramente le due proporzioni

$$8:3::24:9,$$
$$5:2::10:4.$$

Dico che moltiplicandole termine a termine, ossia *per ordine*, si avrà

$$8\times5:3\times2::24\times10:9\times4.$$

Dim. Difatti, scrivendo le p oporzioni sotto forma di frazioni eguali,

si avrà $\frac{8}{3}=\frac{24}{9}$, e $\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$; e moltiplicando per ordine le prime frazioni per le seconde, ne verranno le frazioni eguali $\frac{8\times5}{3\times2}=\frac{24\times10}{9\times4}$;

perciò si avrà $8\times5:3\times2::24\times10:9\times4$.

Questa dimostrazione si estende ad un numero qualunque di proporzioni.

290. *Se si hanno due proporzioni, e si dividono i termini della prima per i corrispondenti della seconda, i quozienti saranno in proporzione.*

Sieno le due proporzioni

$$8:3::24:9,$$
$$5:2::10:4.$$

Dico che dividendole termine a termine si avrà $\frac{8}{5}:\frac{3}{2}::\frac{24}{10}:\frac{9}{4}$.

In effetti, invertendo la seconda, e dopo moltiplicandola per la prima, termine a termine, ne verrà

$$8\times2:3\times5::24\times4:9\times10,$$

ossia $\frac{8\times2}{3\times5}=\frac{24\times4}{9\times10}$, ovvero $\frac{8}{5}:\frac{3}{2}=\frac{24}{10}:\frac{9}{4}$.

291. *Se quattro numeri sono in proporzione, le loro potenze, o le loro radici del medesimo grado saranno in proporzione.*

Sia la proporzione $27:6::9:2$. Moltiplicandola termine a termine per la proporzione $27:6::9:2$ identica alla prima, si avrà

$$27^2:6^2::9^2:2^2;$$

perciò se quattro numeri sono in proporzione, i loro quadrati saranno in proporzione.

Moltiplicando di nuovo quest'ultima proporzione per la proposta $27:6::9:2$, termine a termine, si troverà che i cubi sono in proporzione.

Similmente si prosegue per le potenze più elevate.

Scriviamo ora la data proporzione sotto forma di eguaglianza di due frazioni; si avrà $\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$; ed estraendo le radici quadrate dai due membri, siccome la radice di una frazione si estrae dal numeratore e dal denominatore, affinchè moltiplicata per sè stessa riproduca la proposta frazione, si avrà

$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}};\ \text{cioè}\ \sqrt{27}:\sqrt{6}::\sqrt{9}:\sqrt{2}.$$

Dunque se quattro numeri sono in proporzione le loro radici quadrate saranno ancora in proporzione.

La stessa dimostrazione si fa per le radici cubiche, ec.

CAP. IX.

APPLICAZIONE DELLE PROPORZIONI ALLA RISOLUZIONE DI DIVERSI PROBLEMI.

REGOLA DEL TRE.

292. Due grandezze diconsi variare una in *ragion diretta* dell' altra, quando una dipende dall' altra in modo che se la prima diviene doppia, tripla, ec., anche l' altra diviene doppia, tripla, ec. ; e se la prima diviene la metà, il terzo, ec. anche l' altra diviene la metà, il terzo, ec. Diconsi poi variare una in *ragione inversa* dell' altra, quando la prima divenendo doppia , tripla , ec. , l' altra al contrario diviene la metà, il terzo, ec.

Così, per esempio, il prezzo di un canestro di frutti dipende dal suo peso, e varia in ragion diretta dal medesimo. Il tempo che un cavallo impiega a percorrere una strada dipende dalla velocità del cavallo, cioè dal numero delle miglia che fa in un' ora ; e varia in ragione inversa di queste miglia. Il lavoro fatto da più operai dipende dal numero degli operai , ed anche dal tempo che impiegano a travagliare ; e varia in ragion diretta del numero degli operai, ed anche in ragion diretta del tempo che travagliano. La lunghezza del panno che bisogna per fare un certo numero di abiti eguali, dipende dal numero degli abiti e dalla larghezza del panno ; e varia in ragion diretta del numero degli abiti, ed in ragione inversa della larghezza del panno.

293. Si dice *regola del tre* quella che risolve le questioni in cui il rapporto dell' incognita ad un' altra grandezza nota della stessa specie è uguale a quello di altre due grandezze note che entrano nello enunciato del problema; ovvero è uguale a quello composto dai rapporti di più grandezze note che entrano nell' enunciato medesimo.

Nel primo caso si dice *regola del tre semplice* , e nel secondo *regola del tre composta.*

Da qui si vede che nella regola del tre i dati sono di numero di-

spari, essendo solamente 3 nella semplice, e nella composta possono essere 5, 7, ec. Difatti, i dati che costituiscono il rapporto noto, semplice o composto, sono di numero pari, e siccome nell' altro rapporto in cui entra la cosa cercata si trova la data della stessa specie della cercata, perciò tutte le grandezze note sono di numero impari.

294. Nella regola del tre semplice entrano quattro grandezze, due della stessa specie fra loro, e le altre due pure della stessa specie fra loro, ed a ciascuna delle prime due corrisponde ciascuna delle seconde due. Essa si distingue in *diretta* ed *inversa*. Si dice *diretta* quando, variando una grandezza, la corrispondente varia in ragion diretta; si dice *inversa* se avviene il contrario.

Dichiariamo tutto ciò con qualche esempio.

PROBLEMA 1.° *Quante miglia percorre in 20 ore un corriere che in 3 ore fa 8 miglia?*

Scriviamo con ordine le quantità date e l' incognita, ponendo quelle della stessa specie l' una sotto l' altra, e affianco ad esse le due corrispondenti.

ore	miglia
3	8
20	x

Ora osserviamo che in questo problema entrano quattro grandezze, due della stessa specie che sono 3 ore e 20 ore, e le altre due pure della stessa specie, che sono le 8 miglia note corrispondenti alle prime ore, e le miglia incognite, che dinotiamo con x, corrispondenti alle seconde ore.

Inoltre osserviamo che se le prime ore divenissero il doppio, il triplo, ec. delle seconde ore, anche le prime miglia diverranno il doppio, il triplo, ec. delle seconde miglia; perciò la ragione delle prime alle seconde ore è uguale a quella delle prime alle seconde miglia; quindi si avrà la proporzione $3 : 20 :: 8 : x$, da cui si ricava $x = 53\ ^1/_3$

Da ciò si vede che il problema dato appartiene alla regola del tre semplice *diretta*.

PROBLEMA 2.° *In quanto tempo 24 operai faranno un lavoro che 15 operai hanno fatto in 7 giorni?*

op.	giorni
15	7
24	x

In questo problema entrano quattro grandezze, due della stessa specie che sono 15 operai e 24 operai, ed altre due pure della stessa specie, che sono i 7 giorni noti corrispondenti ai primi operai, e i giorni ignoti che dinotiamo con x, corrispondenti ai secondi operai.

Ora osserviamo che se i primi operai fossero il doppio, il triplo, ec. dei secondi operai, il tempo corrispondente ai primi operai sarà al contrario la metà, il terzo, ec. del tempo corrispondente ai secondi operai; perciò la ragione dei primi ai secondi operai è uguale alla ragione dei secondi ai primi giorni; quindi si avrà la proporzione $24 : 15 : : 7 : x$; da cui si ricava $x = 4\,{}^{3}/_{8}$.

295. Nella pratica non è necessario intavolare alcuna proporzione; ma basta tenere la seguente regola.

Si scriveranno le grandezze della stessa specie l'una sotto l'altra, in modo che le corrispondenti sieno in una stessa linea orizzontale,

Poi si esamina se al crescere di una grandezza, cresca proporzionatamente la grandezza corrispondente, ovvero diminuisca in ragione inversa. Nel primo caso la regola è diretta, nel secondo è inversa.

Quando è diretta si ottiene l'incognita moltiplicando le grandezze note che sono in diagonale, e dividendo il prodotto per l'altra nota. Quando è inversa si ottiene l'incognita moltiplicando le grandezze note che sono in linea orizzontale, e dividendo il prodotto per l'altra nota.

296. Aggiungiamo per esercizio i seguenti esempi.

I. *Si domanda quanto costano 3 libbre e 10 once di un gallone d'oro, conoscendosi che 8 libbre, 5 once, e 20 trappesi costano 230 ducati e 60 grani.*

Poichè al crescere del peso del gallone, cresce il prezzo, il problema appartiene alla regola del tre diretta, e la proporzione che dà il valore dell'incognita sarà

lib.	*on.*	*tr.*		*lib.*	*on.*		*duc.*	*gr.*
8	5	20	:	3	10	: :	230	60 : x.

Ma qui, ed in tutti i casi consimili, riesce più comodo, come accennammo nel n.° 265, ridurre i numeri complessi in unità della specie più piccola che trovasi in ciascuna ragione; e perciò convien convertire le libbre e le once in trappesi, e i ducati in grani; in tal modo l'incognita esprimerà grani, cioè esprimerà unità eguali a quelle dell'altro termine della ragione a cui appartiene l'incognita; e la proporzione di sopra si ridurrà alla seguente, $3050^{tr.}\ 1380^{tr.} : : 23060^{gr.}\ x^{gr.}$, da cui si ricava $x = 10433^{gr.}\,{}^{43}/_{61}$, cioè eguale prossimamente a *duc.* 104,34.

II. *Per vestire un Reggimento sono bisognati 7200 metri di un panno largo metri 1,35. Quanti metri bisogneranno per vestirlo di un panno largo 90 centimetri?*

Qui si osserva che diminuendo la larghezza del panno, cresce in ragione inversa la lunghezza; perciò la regola è inversa, e l'incognita vien data dalla proporzione $9 : 135 :: 7200 : x$, da cui si ricava $x = 10800$ metri.

III. *Una fontana, che in 2^or. 24' ha riempito 9 botti di acqua, in quanto tempo riempirà 34 botti e 5 barili?*

Qui la regola è diretta, e l'incognita viene eguale a 9° 10' 40''

IV. *Un giardino apprezzato al 4 per 100 si è pagato 12000 lire; ma poi, quantunque continuasse a dare la stessa rendita, si è rivenduto al 5 ½ per 100. Si domanda quanto è il secondo valore del giardino.*

Avvertiamo che al 4 per 100 significa che, per ogni 4 lire di frutto annuale che dà il giardino, si pagano 100 lire. Lo stesso si dica del 5 ½ per 100. Dopo ciò si vede che la regola è inversa, e si avrà l'incognita x=*lire* 8727,27.

METODO DI RIDUZIONE ALL'UNITÀ.

297. Evvi un altro metodo per risolvere i problemi della regola del tre, il quale si chiama METODO DI RIDUZIONE ALL'UNITÀ.

Questo metodo consiste in trovare prima il valore della cosa cercata il quale corrisponde all'unità, e poi si trova il valore corrispondente a quel numero che si vuole, e questo valore si ottiene moltiplicando, o dividendo quello corrispondente all'unità pel detto numero, secondo che varia in ragion diretta o inversa di questo numero.

Così nell'esempio in cui si cerca quante miglia fa in 20 ore un corriere che in 3 ore ha fatto 8 miglia, si trova prima il numero delle miglia che il corriere fa in un ora, il quale è $\frac{8}{3}$, perchè si ottiene dividendo per 3 le 8 miglia fatte in 3 ore; quindi per avere le x miglia percorse in 20 ore si moltiplicano quelle fatte in un ora per 20, e si avrà

$$x = \frac{8 \times 20}{3} = 53\,{}^1/_3.$$

Parimente nell'esempio in cui si cerca in quanto tempo 24 operai fanno un lavoro che 15 operai hanno fatto in 7 giorni,

si trova prima il tempo corrispondente ad un solo operaio, che si ottiene moltiplicando per 15 il tempo 7 giorni impiegato da 15 operai, perchè un solo operaio v' impiega un tempo 15 volte maggiore; e poi il tempo 7×15 impiegato da un solo operaio si divide per 24, per avere il tempo impiegato da 24 operai che deve essere 24 volte minore; e verrà il tempo cercato $x = \frac{7 \times 15}{24} = 4\,^3/_8$.

REGOLA DEL TRE COMPOSTA.

298. Per risolvere un problema appartenente a questa regola bisogna operare nel seguente modo.

Si scrivono le grandezze dell' enunciato in due linee orizzontali, ponendo in una la cosa cercata e le grandezze corrispondenti, e nell' altra la cosa data della stessa specie della cercata e le grandezze corrispondenti, in modo che le quantità della stessa specie stieno l' una sotto l' altra.

Poi si esamina se le grandezze che sono in una delle due linee orizzontali variano in ragion diretta o inversa della cosa cercata; e quelle che variano in ragion inversa si cambiano di posto con quelle della stessa specie che sono nell' altra linea.

Dopo ciò, si stabilirà la proporzione.

Cosa cercata sta alla data della medesima specie, come il prodotto di tutti i numeri che sono nella linea della cosa cercata sta al prodotto de' rimanenti numeri che sono nella linea della cosa data della stessa specie (*).

Applichiamo la regola precedente al seguente

PROBLEMA. *Se per costruire un muro avente 4 palmi di grossezza e 75 di lunghezza in 24 giorni, sono bisognati 20 operai; quanti ne bisogneranno per costruire un muro avente 5 palmi di grossezza e 90 di lunghezza in 15 giorni?*

Indichiamo con x il numero incognito degli operai, e scriviamo le quantità che entrano nell' enunciato del problema in modo che quelle della stessa specie stieno l' una sotto l'altra, e le corrispondenti in una stessa linea orizzontale, come qui affianco.

gros.	lung.	gior.	op.
4	75	24	20
5	90	15	x

(*) Senza stabilire la proporzione può dirsi che: *la cosa cercata si trova moltiplicando la cosa data della stessa specie per tutti i numeri che sono nella linea della cosa cercata, e dividendo il prodotto per quello de' rimanenti numeri.*

Poi cominciamo dall'esaminare se la grossezza varia in ragion diretta o inversa degli operai, e si vede chiaramente che crescendo la grossezza del muro, cresce proporzionatamente il numero degli operai. Indi si passa ad esaminare come varia la lunghezza, e si trova pure che essa cresce proporzionatamente al numero degli operai. Infine si esamina il tempo, e si vede che crescendo il numero dei giorni, diminuisce in ragione inversa il numero degli operai; perciò conviene cambiar fra loro di posto i giorni, e così le grandezze dell'enunciato del problema si troveranno scritte come qui di contro.

gros.	lung.	gior.	op.
4	75	15	20
5	90	24	x

Dopo ciò, si stabilirà la proporzione detta nella regola, cioè

$$x : 20 :: 5 \times 90 \times 24 : 4 \times 75 \times 15,$$

da cui si ricava $x = \frac{20 \times 5 \times 90 \times 24}{4 \times 75 \times 15} = 48.$

Dim. Osserviamo che, restando la stessa la lunghezza ed il numero dei giorni corrispondenti a 20 operai, se la grossezza cresce, crescerà in ragione diretta il numero degli operai; e siccome la grossezza corrispondente a 20 operai è 4, e poi diviene 5, indicando con z gli operai corrispondenti alla grossezza 5, si avrà la proporzione

$$4 : 5 :: 20 : z, \text{ da cui si ricava } z = \frac{20 \times 5}{4}.$$

Or se la lunghezza del muro corrispondente a z operai invece di essere 75 crescesse e divenisse 90, il numero z degli operai crescerebbe in ragion diretta, e chiamando y il numero degli operai corrispondenti alla lunghezza 90, si avrà la proporzione

$75 : 90 :: z : y$, ossia $75 : 90 :: \frac{20 \times 5}{4} : y$, da cui si ricava

$$y = \frac{20 \times 5 \times 90}{4 \times 75}.$$

Infine se il numero dei giorni corrispondenti ad y operai invece di essere 24 diminuisse, e divenisse 15, al contrario il numero degli operai che ci vogliono a costruire lo stesso muro deve crescere in ragione inversa; e chiamando x il numero

degli operai corrispondenti a 15 giorni, si avrà la proporzione

$$15 : 24 :: y : x \text{ , ossia } 15 : 24 :: \frac{20 \times 5 \times 90}{4 \times 75} : x,$$

da cui si ricava $x = \dfrac{20 \times 5 \times 90 \times 24}{4 \times 75 \times 15}$.

Dividendo ora queste due grandezze eguali per la grandezza data della stessa specie della cercata, cioè per 20, verrà

$$\frac{x}{20} = \frac{5 \times 90 \times 24}{4 \times 75 \times 15}.$$

Da qui si desume la regola per trovare l'incognita; cioè, che dopo essersi scritte le grandezze della stessa specie l'una sotto l'altra, in modo che le corrispondenti stieno in una medesima linea orizzontale, e dopo esaminato se quelle che sono in una stessa linea orizzontale variano in ragion diretta o inversa della cosa cercata, e dopo scambiate di posto fra loro nelle due linee le grandezze della stessa specie che variano in ragione inversa della cosa cercata, l'incognita verrà data dalla seguente proporzione.

La cosa cercata sta alla data della stessa specie, come il prodotto di tutti i numeri contenuti nella linea della cosa cercata sta al prodotto dei rimanenti numeri contenuti nella linea della cosa data.

Dalla stessa eguaglianza si rileva che la ragione della cosa cercata alla data della stesssa specie è composta dalle altre ragioni fra le rimanenti grandezze che entrano nell'enunciato del problema, cioè dalle ragioni di 5 : 4, di 90 : 75, e di 24 : 15, che sono rispettivamente quella delle grossezze, quella delle lunghezze, e l'inversa di quella dei giorni; e perciò il problema appartiene alla regola del tre composta.

METODO DI RIDUZIONE ALL' UNITA'.

299. Abbiamo già detto nel n.° 297 in che consiste questo metodo; applicandolo ora all'esempio precedente, si dirà:

Siccome per costruire un muro avente 4 palmi di grossezza e 75 di lunghezza in 24 giorni, sono bisognati 20 operai; se la grossezza del muro invece di 24 palmi si riducesse ad 1 palmo, tutte le altre coste restando le stesse, il numero degli operai sarà 4 volte minore, cioè sarà $\frac{20}{4}$, e quindi per

un muro che ha 5 palmi di grossezza, il numero degli operai sarà $\frac{20\times5}{4}$. Ora, restando 5 la grossezza, se la lunghezza invece di palmi 75 fosse di 1 palmo, il numero degli operai sarebbe 75 volte minore, cioè sarebbe $\frac{20\times5}{4\times75}$; e quindi per un muro di 90 palmi, gli operai saranno $\frac{20\times5\times90}{4\times75}$. Infine restando 5 la grossezza e 90 la lunghezza, se il numero de' giorni si riducesse ad 1, cioè divenisse 24 volte minore, viceversa il numero degli operai sarebbe 24 volte maggiore, cioè sarebbe $\frac{20\times5\times90\times24}{4\times75}$; ma i giorni essendo 15, il cercato numero di operai sarà uguale al precedente diviso per 15, cioè sarà $\frac{20\times5\times90\times24}{4\times75\times15}$.

300. Aggiungiamo per esercizio i seguenti esempi.

I. *Se 8 machine, che agiscono 10 ore al giorno con egual velocità, han fatto un certo lavoro in 35 giorni; si domanda quanto tempo dovranno impiegare a fare la stessa quantità di lavoro 5 machine, che agiscono 14 ore al giorno con una velocità tripla di quella delle prime.*

mach.	*or.*	*vel.*	*gior.*
8	10	1	35
5	14	3	x

Osserviamo in primo luogo che la velocità di ciascuna delle seconde machine essendo tripla di quella di ciascuna delle prime, se la velocità delle prime si rappresenti con 1, quella delle seconde verrà rappresentata da 3; e però le grandezze dell' enunciato del problema dovranno scriversi come si vede qui di contro. Poi esaminando se le grandezze che sono in una linea orizzontale variano in ragion diretta o inversa della cosa cercata, si troverà che variano tutte in ragione inversa; laonde la proporzione da stabilirsi sarà la seguente $x:35::8\times10\times1:5\times14\times3$, da cui si ricava $x=13\,{}^{1}/_{3}$; e poichè la durata del lavoro giornaliero delle seconde machine è di ore 14, e la terza parte di 14 ore è $4^{o}\ 40'$, si avrà $x=13^{gio.}\ 4^{o}\ 40'$.

II. *Il capitano di una nave sulla quale erano 90 persone, per un viaggio di 40 giorni ha speso 250 lire a biscotto, pa-*

gato a 33 centesimi il chilogrammo. Dovendo poi intraprendere un viaggio di 5 mesi con 160 persone, e dovendo comprare il biscotto a 38 centesimi il chilogrammo ; si domanda che danaro dovrà spendere.

Qui le grandezze che sono in una linea orizzontale variano tutte in ragion diretta della cosa cercata , e questa viene eguale a lire 1919,19.

III. *In quanto tempo 13 mortai, che sparano senza interruzione, gitteranno in una fortezza 10000 bombe, conoscendosi che 8 mortai in 2 ore ne gittano 192?*

Risposta: in 55° 33' 20".

IV. Supposta uniforme la dilatazione lineare dell'oro, che si è sperimentata essere di 0,0014641 per i 100 gradi del termometro centigrado; si domanda di quanto si allunga una verga d'oro di palmi 3,15 in Napoli passando dal massimo freddo d'inverno che è (in media) di —1°,14 al massimo caldo di està che è 34°, 37.

Risposta: di palmi $0,00114641 \times 3,15 \times 0,3551 = 0,00163769$.

Avvertimento. Nel problema I abbiamo veduto che la frazione $^1/_3$ di giorno significa $^1/_3$ del tempo del lavoro giornaliero, il quale essendo di 14 ore, si è preso perciò la terza parte di 14 ore, e non già di tutte le 24 ore che compongono l'intero giorno. Vi sono altri problemi nei quali si cerca p. e. quante persone si richieggono per fare un certo lavoro , e l'incognita si trova eguale ad un certo numero intero di persone più una frazione, p. e. a 5 persone e $^3/_4$; in questo caso e negli altri consimili la frazione $^3/_4$ vuol dire che, oltre del numero intero 5 delle persone , si richiede dippiù un'altra persona, o un agente qualunque , che faccia $^3/_4$ del lavoro fatto da ciascuna delle 5 persone.

ALTRA MANIERA DI CONSIDERARE LA REGOLA DEL TRE.

301. Avendo parlato nel n.° 292 di grandezze che variano in ragion diretta o inversa di altre grandezze, è importante stabilire la seguente proposizione.

Allorchè una grandezza A *dipende da più altre, p. e. da cinque, che indico con* m, n, p, q, r, *e varia in ragion diretta di* m, n, p, *ed in ragione inversa di* q *ed* r , *essa è proporzionale al prodotto* $m \times n \times p \times \frac{1}{q} \times \frac{1}{r}$: cioè, è proporzionale al prodotto di quelle da cui dipende in ragion diretta, diviso pel prodotto di quelle da cui dipende in ragione inversa.

Difatti, se il fattore m diviene doppio, triplo, ec., la grandezza A per ipotesi anche diviene doppia, tripla, ec., ed il prodotto $m \times n \times p \times \frac{1}{q} \times \frac{1}{r}$ pure diviene doppio, triplo, ec.; perciò A varia in ragion diretta di questo prodotto. Lo stesso si dirà dei fattori n e p, ed il contrario dei fattori q ed r.

Ciò premesso, passiamo a dare un'altra definizione della regola del tre.

La *Regola del tre* è quella che insegna a risolvere i problemi in cui l'incognita dipende da una o più grandezze al variar delle quali essa varia in ragion diretta o inversa delle stesse. Questa regola si distingue in *semplice* e *composta*, secondo che le grandezze da cui la cosa cercata dipende sono una o più.

Nei detti problemi si conosce un valore della grandezza dipendente, corrispondente ad un particolare valore di quelle da cui dipende, e si cerca il valore che essa acquista relativamente ad altri valori che si danno alle grandezze dalle quali dipende. Tali problemi per la proposizione poco fa stabilita, si risolvono mediante la seguente regola generale (*).

Il valore incognito della grandezza dipendente sta al valore noto di essa, come il prodotto delle grandezze dalle quali dipende corrispondenti al valore incognito, sta al prodotto delle medesime grandezze corrispondenti al valore noto, avendo cura di invertire i fattori che variano in ragione inversa della grandezza dipendente.

(*) Volendo ritenere la denominazione di *ragion composta* enuncieremo in un modo diverso la regola per trovare l'incognita, dandone una diversa dimostrazione applicabile ezlandio alle grandezze considerate puramente come continue.

Il valore incognito della grandezza dipendente corrispondente a dati valori delle grandezze dalle quali dipende, sta al valor noto che essa acquista corrispondente anche a dati valori delle grandezze da cui dipende, in ragion composta dalle ragioni dei primi valori a' rispettivi secondi valori di esse grandezze, dovendosi cambiar di posto i termini delle ragioni inverse.

Dim. Dinotiamo con A una quantità dipendente da quattro altre, che indichiamo con m, n, p, q; ed essa varii in ragion diretta delle tre prime ed in ragion inversa dell'ultima; cioè m divenendo m', A divenga A', in modo che si abbia $m : m' :: A ; A'$; e poi n divenendo n', A' divenga A'', in modo che si abbia $n : n' :: A' : A''$; ed indi p dividendo p', A'' divenga A''', in modo che si abbia $p : p' :: A'' : A'''$; e finalmente q dividendo q', A''' divenga A'''', in modo che si abbia $q' : q :: A''' : A''''$. Dico che sarà

$$A : A'''' :: (m : m')(n : n')(p : p')(q' : q).$$

In effetti, le grandezze A, A', A'', A''', A'''' essendo omogenee, si avrà $A : A'''' :: (A : A')(A' : A'')(A'' : A''')(A''' : A'''')$; ma avendo poco anzi osservato che $A : A' :: m : m'$, ed $A' : A'' :: n : n'$, ed $A'' : A''' :: p : p'$, ed $A''' : A'''' :: q' : q$; ne segue che si avrà $A : A'''' :: (m : m')(n : n')(p : p')(q' : q)$.

PROBLEMI D' INTERESSE.

302. Allorchè il danaro si dà in prestito, colui che lo toglie a prestito deve, dopo un certo tempo, restituire non solo quello che si ha imprestato, ma ben anche un dippiù, per quell' utile che il proprietario avrebbe potuto ritrarre dal suo danaro, se lo avesse impiegato diversamente. Quel dippiù che si restituisce dopo un dato tempo si chiama *interesse*. L' interesse dopo un anno si chiama *rendita*. Il danaro imprestato si chiama *capitale*, *fondo*, o *sorte principale*.

Il rapporto fra l' interesse dopo un anno ed il capitale corrispondente si chiama *ragione dell' interesse*. Questa ragione ordinariamente si stabilisce fra il capitale 100 e l' interesse che corrisponde a 100 dopo l' anno: e però il capitale 100 suole dirsi capitale *elementare* o *di paragone*. Così p. e. quando si dice di essersi impiegato il danaro alla *ragione del 6 per 100;* significa che la ragione della rendita al suo capitale equivale a quella di 6 a 100; o in altri termini, per ogni 100 ducati debbonsi pagare dopo un anno 6 ducati d'interesse.

La rendita del capitale elementare suole chiamarsi *tassa*. Per scrivere che un capitale è stato impiegato p. e. alla ragione del *6 per 100*, si scrive al *6 p°/₀*, o più semplicemente al *6°/₀*.

I problemi d' interesse non sono che quistioni di regola del tre. Essi appartengono alla regola del tre semplice quando i capitali sono impiegati per lo stesso tempo, ed alla regola del tre composta quando sono impiegati per diversi tempi.

Ciò vien rischiarato da' seguenti esempi.

I. *Il capitale di 860 ducati impiegato alla ragione del 6 per 100, che rendita darà?*

È facile vedere che questo problema appartiene alla regola del tre semplice, perchè al crescere del capitale cresce proporzionalmente la rendita; quindi la proporzione che darà il valore dell' incognita è $100 : 860 :: 6 : x$, da cui si ricava

$$x = \frac{860 \times 6}{100} = 51,6.$$

Dunque: *si ottiene la rendita moltiplicando il capitale per la tassa, e dividendo il prodotto per 100.*

II. *Qual capitale si richiede per avere 72 ducati di rendita alla ragione del 4 p°/₀?*

Qui la proporzione che dà l' incognita è $4 : 72 :: 100 : x$, dalla quale si trae $x = \frac{72 \times 100}{4} = 1800$:

Dunque: *si ottiene il capitale moltiplicando la sua rendita per 100, e dividendo il prodotto per la tassa.*

III. *A qual ragione è stato impiegato il capitale di 2300 ducati che ha dato di rendita 140 ducati?*

Risposta: alla ragione di $6\,{}^{2}/_{23}$, ossia di 6,09 %.

303. Passiamo ora ai problemi d' interesse nei quali entra la considerazione del tempo.

Indichiamo con C il capitale, con I l' interesse, e con T il tempo corrispondente; supponiamo che l' interesse di 100 dopo l' anno sia 6, e che il tempo sia dato in mesi.

cap.	tem.	int.
100	12	6
C.	T.	I.

Scriviamo, come si vede qui affianco in una stessa riga il capitale elementare 100, il tempo 12 mesi in cui è impiegato, e l' interesse 6 che gli corrisponde; e al di sotto di essi le cose della stessa specie, cioè il capitale C, il tempo T in cui è impiegato, e l' interesse I corrispondente.

Osserviamo ora che i capitali ed il tempo variano in ragion diretta degl' interessi, perciò si avrà, per la regola del tre composta, che il rapporto degl' interessi è uguale al rapporto diretto dei capitali moltiplicato pel rapporto diretto dei tempi, cioè si avrà

$$\frac{I}{6} = \frac{C}{100} \times \frac{T}{12}.$$

Da questa eguaglianza si ricava il rapporto dei capitali dividendo i due membri pel rapporto dei tempi, e si ricava il rapporto dei tempi dividendo i due membri per quello dei capitali, e si avrà

$$\frac{C}{100} = \frac{I}{6} \times \frac{12}{T}, \quad \text{e} \quad \frac{T}{12} = \frac{I}{6} \times \frac{100}{C}.$$

Dunque:

Il rapporto fra gl'interessi è uguale al rapporto diretto dei rispettivi capitali moltiplicato per il diretto dei tempi corrispondenti.

Il rapporto fra i capitali è uguale al rapporto diretto degl' interessi moltiplicato per l' inverso dei tempi.

Il rapporto dei tempi è uguale al rapporto diretto degl' interessi moltiplicato per l' inverso dei capitali.

E però:

Si ottiene l' interesse moltiplicando l' interesse di 100 pel rapporto diretto dei capitali e pel rapporto diretto dei tempi.

Si ottiene il capitale moltiplicando il capitale elementare 100 pel rapporto diretto degl' interessi e per l' inverso dei tempi.

E si ottiene il tempo moltiplicando il tempo relativo al capitale 100 pel rapporto diretto degl' interessi, e per l' inverso dei capitali.

Facciamo notare che quando il tempo è dato in giorni e non in mesi, il tempo relativo al capitale 100 sarà 365, ovvero 360 se si considera ogni mese di 30 giorni.

304. Nelle questioni d' interesse è importante conoscere la regola che dà il valore di un capitale unito al suo interesse dopo un dato tempo: Essa è la seguente.

Il valore di un capitale unito al suo interesse dopo un dato tempo, si ottiene moltiplicando il capitale per l' unità accresciuta dell' interesse dell' unità dopo quel tempo.

Così p. e. se si volesse il valore che acquista un capitale di 840 lire impiegato al 6 °/₀ unito all' interesse dopo 7 mesi; siccome l' interesse dell' unità è 0,06 , quello dell' unità dopo 7 mesi sarà $0,06 \times \frac{7}{12} = \frac{0,01 \times 7}{2} = 0,035$; perciò il valore del capitale sarà $840 \times 0,035 = 869,40$.

Per dimostrare questa regola, chiamo x l' interesse dell' unità dopo un certo tempo, e sia 520 il capitale. È chiaro che se l' unità dopo un certo tempo dà per interesse x, il capitale 520 darà per interesse $520 \times x$; perciò dopo il detto tempo il capitale 520 unito al suo interesse diviene $520 + 520 \times x$, cioè 520 preso una volta più x volte, ossia $520 \times (1 + x)$.

305. Vi sono altre specie di contratti che diconsi d' *interessi a moltiplico*, d' *interessi a scalare*, di *annualità e vitalizj* : ma non è qui il luogo di poter risolvere queste quistioni; e solamente, per darne un'idea, dichiariamo per ora che cosa sieno questa sorta di contratti.

Gl' *interessi a moltiplico*, che più propriamente diconsi *interessi composti*, sono quelli in cui il creditore dopo l' anno non ritira l' interesse del suo danaro, ma lo fa rimanere in mano del debitore per riscuoterne dopo il secondo anno anche l' interesse; e dopo il secondo anno gl' interessi nè anche si esigono, affinchè dopo il terzo anno possano anche essi fruttare l' interesse; e così continuando in ogni anno, dopo un certo numero di anni si troveranno cumulati capitali ed interessi d' interessi.

Questa maniera di far fruttare il danaro vien detta, *capitalizzare gli interessi.*

Gl' *interessi a scalare*, sono quelli in cui si conviene che il debitore paghi dopo intervalli eguali di tempo, p. e. ogn' anno, una determinata somma al creditore, la quale sia sempre maggiore dell' interesse, affinchè con una parte di questa somma si soddisfi l' interesse, e con la rimanente parte si diminuisca il capitale: in tal modo dopo un certo numero di anni si troverà estinto il capitale. La somma costante che si paga ogni anno per estinguere il debito si chiama *annualità*, e si dà anche questo nome a quella somma costante che si versa ogni anno in una cassa di risparmio capitalizzando gl' interessi, per poi introitare il capitale e gl' interessi dopo un dato tempo. Se un contratto è stabilito con la condizione di doversi dare ad una persona un' annualità durante la vita, quest' annualità si chiama *vitalizio*.

Gl' interessi a scalare sogliono anche convenirsi con pagare il debito a rate eguali mensili o annuali finchè si estingue il capitale; perciò queste rate non servono a scomputare interessi, ma gl' interessi si pagano dopo estinto il capitale, e si calcolano sul capitale diminuito di ciascuna rata. Così p. e., se il capitale è di 850 ducati, e ciascuna rata a pagarsi è di 30 ducati al mese, alla fine del primo mese l' interesse sarà calcolato su tutto il capitale 850; alla fine del secondo mese l' interesse sarà pagato sul capitale 850 meno 30; alla fine del terzo mese sarà pagato sul capitale 850 meno 60, e così di seguito.

Quistioni di Sconto e di Rendita consolidata.

306. Allorchè un individuo dà una somma ad un altro per essergli restituita dopo un certo tempo, e da questa somma si ritiene anticipatamente l' interesse corrispondente a quel tempo, questo interesse che si usa in commercio si dice *sconto*. Esso non apparisce dal titolo in forza di cui deve esigersi la somma.

Dunque per trovare lo sconto non si deve far altro che calcolare l' interesse prodotto dopo un certo tempo da un capitale impiegato ad una data ragione.

In commercio spesso si ha bisogno di calcolare lo sconto di una *cambiale* o di un *biglietto ad ordine*.

Con la *cambiale* un negoziante autorizza un individuo ad esigersi in un' altra *piazza* di commercio da persona che è in relazione commerciale col negoziante una determinata somma dopo un certo tempo, di cui l'ultimo giorno si dice giorno della *scadenza* della cambiale.

Il negoziante si dice che *trae* la cambiale, la quale perciò suole chiamarsi *tratta*. La persona a favore di cui si rilascia la cambiale per esigerne la *valuta* nel giorno della scadenza, si dice *possessore* della cambiale. Il possessore può *girare* la cambiale ad un altro individuo, che dicesi *giratario*; e la *girata* si fa scrivendo a piedi o sul dorso della cambiale poche parole con cui si dichiara che il pagamento invece di farsi a lui si faccia ad un altro, il quale allora diviene possessore della cambiale.

Se il possessore ha bisogno di danaro prima della scadenza, può farselo anticipare da colui che deve pagar la valuta della cambiale, o anche da un altro negoziante, purchè questi abbia fiducia nella solvibilità di chi deve fare il pagamento; ed allora chi anticipa il danaro al possessore della cambiale si ritiene su di esso l'interesse calcolato sino al giorno della scadenza, quest' interesse è appunto lo *sconto*.

Il *biglietto ad ordine* differisce dalla cambiale, perchè il pagamento non si fa da piazza a piazza, ma si fa nella medesima piazza e dalla medesima persona che rilascia il biglietto ad ordine. Ciò avviene per lo più quando un negoziante compra merci con l' obbligo espresso nel biglietto di pagarne la valuta dopo un determinato tempo; ed avviene anche quando lo stesso si fa imprestar danaro per restituirlo ad una data scadenza; ed allora chi impresta il danaro si prende su di esso l' interesse anticipato cioè lo *sconto*. Il biglietto ad ordine può girarsi come la cambiale.

La somma da esigersi alla scadenza si dice *valore nominale* della cambiale, la somma che si anticipa, la quale pareggia la differenza fra il valore nominale e lo sconto, dicesi *valore attuale* della cambiale.

307. Passiamo ora a risolvere le seguenti questioni relative allo *sconto*.

Qual' è lo sconto che deve ritenersi su di una cambiale di lire 2500 un negoziante che ne anticipa il pagamento 5 mesi e 12 giorni prima della scadenza, e che impiega il danaro al $7\,^1/_2\,^0/_0$.

Dalla regola degl' interessi si ha $\frac{x}{7\frac{1}{2}}=\frac{2500}{100}\times\frac{162}{365}$;

$$\text{ossia } x=\frac{7{,}50\times2500\times162}{100\times365}=\frac{7{,}50\times5\times162}{73}=83{,}22.$$

Lo sconto come l' abbiamo calcolato si dice *preso al di fuori;* e così ordinariamente viene calcolato dai negozianti; ma si vede che non è questa la giusta maniera di calcolarlo; perchè in tal modo l' interesse che il negoziante si prende non è sul danaro che anticipa, ma è su di una somma maggiore, cioè su tutto il valor nominale delle cambiale.

Volendo calcolare lo sconto con esattezza, ecco come può operarsi. Chiamo a il valore della cambiale ed x la somma che il negoziante deve anticipare, cioè il valore attuale della cambiale. È chiaro che la somma x la quale anticipa il negoziante, deve esser tale che unita all' interesse che produrrebbe sino all' epoca della scadenza, deve eguagliare il valore a della cambiale.

Ora la somma x unita all' interesse che produce sino all' epoca della scadenza, diviene eguale ad x moltiplicata per l' unità accresciuta dell' interesse dell' unità dopo quel tempo, perciò se indichiamo con r il detto interesse dell' unità, la somma x dopo il tempo della scadenza diverrà $x\times(1+r)$; e siccome questa deve eguagliare il valore nominale a della cambiale, si avrà $x\times(1+r)=a$; e dividendo i due membri pel fattore $1+r$, si avrà $x=\frac{a}{1+r}$.

Dunque: *il valore attuale della cambiale si ottiene dividendo il valore nominale per l' unità aumentata dell' interesse dell' unità sino all' epoca della scadenza.*

Calcoliamo lo sconto al di dentro nell'esempio dato di sopra. Siccome l'interesse dell'unità dopo 162 giorni è $\frac{0,075 \times 162}{365} = \frac{0,015 \times 162}{73} = 0,033$, verrà $x = \frac{2500}{1,033} = 2420,13$.

Ora se togliamo questo valore attuale della cambiale dal valore nominale si avrà lo sconto, che viene eguale a lire 79,87 ; perciò è minore di quello preso al di fuori di lire 3,35.

308. Allorchè si conosce lo sconto preso al di dentro, e si vuol trovare a qual ragione si è impiegato il danaro bisogna dividere lo sconto per il valore attuale, il quoziente sarà l' interesse dell' unità sino all' epoca della scadenza ; da questo interesse si desumerà quello dell' unità dopo l' anno, ed infine l' interesse di 100 che è quello cercato. In effetti dall' eguaglianza $x(1+r)=a$, dividendo per x, si ha $1+r=\frac{a}{x}$, e togliendo l' unità dai due membri verrà $r=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$, ma $a-x$ è lo sconto, per essere x il valore attuale, ed r è l'interesse dell' unità; ecco dunque che questo interesse si ottiene nel modo suddetto.

309. Allorchè un Governo ha bisogno di danaro contrae un debito con i particolari, che dicesi *Debito Pubblico*, pagandone l' interesse ad una determinata ragione, p. e. al 5 %; e perchè i nomi dei creditori si scrivono in un registro destinato all' uopo che vien detto *Gran Libro*, la rendita che essi debbono esigere si dice *consolidata* o *iscritta*. Ma, per non rendere inceppati i capitali dei creditori, si permette che essi possano vendere la loro rendita ad altre persone, dovendosi dichiarare e garantire dagli *agenti di cambio* sull' Officio del Gran Libro la persona che vende e quella che compra, affinchè la rendita iscritta in testa ad uno possa *trasferirsi in* testa ad un altro, scrivendosi così sul Gran Libro il nome del nuovo possessore della rendita.

Vi è anche la rendita *al latore*, ed è quella in cui il Governo rilascia ai creditori un titolo detto *Cedola al latore*, senza che in esso sia scritto il nome del creditore, pagandosi dal Governo la rendita a chi presenta questo titolo, ossia al latore della Cedola ; quindi se la Cedola si disperdesse dal possessore , e si trovasse da persona di mala fede che volesse profittarne , questa diverrebbe padrona della rendita , perchè il Governo riguarda come suo creditore chi gli presenta la Cedola ossia il latore della stessa.

La rendita consolidata potendosi vendere come ogni altra mercanzia, può aumentare e diminuire di prezzo , secondo le maggiori o minori ricerche che se ne hanno. Le contrattazioni di rendita si fanno in un locale detto *Borsa*, dove si fanno tutte le grandi contrattazioni commerciali, e se ne fissa il prezzo dagli Agenti di cambio. La variazione del

prezzo della rendita cade sul capitale, perchè l'interesse si considera fisso. Nella rendita del debito pubblico italiano l'interesse fisso è al 5 %, ed il capitale può variare: così p. e. se in un giorno il prezzo della rendita nella Borsa è di 92 lire, e nel giorno seguente di 93 lire, vuol dire che 5 lire di rendita che il giorno precedente si compravano per 92 lire, il giorno seguente debbono pagarsi 93 lire.

Ogni unità di variazione sulla rendita si costuma chiamarsi *punto*, e perciò nell'esempio accennato l'aumento di una lira da un giorno ad un altro corrisponde all'aumento di un punto; e se nel giorno seguente ai due considerati, 5 lire di rendita si vendono per lire 94,45, la rendita sarebbe aumentata di punti 2,45 rispetto al primo giorno che si vendeva al prezzo di lire 92.

Il *prezzo* o *corso* della rendita si legge ogni giorno su i *listini* della Borsa, che sogliono inserirsi anche su i giornali.

Dietro queste nozioni passiamo ai seguenti esempi.

1.° *Qual capitale si richiede per acquistare lire 68,35 di rendita al prezzo di 94,70?*

Si dirà: se 5 lire si pagano 94,70, quanto debbono pagarsi lire 68,35? Indicando con x il prezzo cercato si avrà

$$x=\frac{94,70\times68,35}{5}.$$

Si facilita l'operazione moltiplicando i due termini della frazione per 2, il che conduce alla seguente regola. *Per trovare il capitale corrispondente ad una data rendita iscritta, si moltiplica la rendita pel prezzo corrente raddoppiato, ed il prodotto si divide per 10.*

2.° *Qual rendita potrà aversi dal capitale di 5784 lire, al corso del 102,45?*

Si troverà la rendita $x=\frac{5784\times5}{102,45}$; e moltiplicando per 2 i termini della frazione ne risulterà la seguente regola pratica. *Per trovare la rendita iscritta corrispondente ad un dato capitale, si moltiplica il capitale per 10, ed il prodotto si divide pel capitale elementare raddoppiato.*

Siccome il Regolamento del debito pubblico italiano esige che la rendita *al latore* si negoziasse a 50 a 50 lire, per la ragione che le Cedole sono solamente di 50 in 50 lire; così si rendono facilissimi i calcoli dei pagamenti di rendita, perchè per ottenere il prezzo di 50 lire di rendita al corso p. e. di 98,65 basta moltiplicare il prezzo della rendita per 10, il che si fa trasferendo la virgola di un posto verso dritta; e ciò perchè, se 5 lire si pagano 98,65, 50 lire che sono 10 volte maggiori di 5 lire debbono pagarsi un prezzo 10 volte maggiore; quindi 50 lire al prezzo di 98,65 debbono pagarsi lire 986,5. Per comprare più di 50 lire, p. e. per comprarne 350 al corso di 92,85, si trova prima il prezzo di 50 lire, che è 928,5, e poi questo si moltiplica per 7, per essere 350 7 volte più grande di 50, e così si avrà il prezzo di 350 lire, che sarà 6499,50.

REGOLA DI SOCIETA'.

310. Si chiama *regola di società* o *di compagnia* quella che ha per oggetto di ripartire a più socii il guadagno o la perdita avuta in un negozio, proporzionalmente ai capitali da essi impiegati.

Essa si dice *semplice* se i capitali sono tutti impiegati per lo stesso tempo; e dicesi *composta* quando sono impiegati per tempi diversi.

Ecco come si procede per risolvere le questioni della regola di società semplice.

Si sommino i capitali parziali di tutti i socii, e si avrà il CAPITALE TOTALE; *poi si stabilisca la proporzione* : *Capitale totale sta a capitale parziale di un socio come il guadagno o perdita totale sta al guadagno o perdita parziale di quel socio.*

Perchè è chiaro che se il capitale di un socio e metà, terza parte, ec. del capitale totale, anche il guadagno di quel socio deve essere metà, terza parte, ec. del guadagno totale.

ESEMPIO. — Tre negozianti hanno impiegato rispettivamente i capitali di 3000 lire, di 2400 lire, e di 1000 lire; o dopo un certo tempo hanno guadagnato 1200 lire. Si domanda che porzione di guadagno tocca a ciascuno.

Si addizionano prima i capitali parziali, e si avrà per somma 6400 lire, che è il capitalo totale. Poi per trovare i guadagni rispettivi del primo, del secondo, e del terzo socio, si stabiliranno le tre proporzioni.

$$6400 : 3000 : : 1240 : x,$$
$$6400 : 2400 : : 1200 : y,$$
$$6400 : 1000 : : 1200 : z;$$

dalle quali si ricava $x = 562,5$, $y = 430$, $z = 187,5$.

Si può fare la PROVA sommando i tre guadagni ottonuti, e la loro somma deve trovarsi eguale al guadagno totale, se le operazioni sono state ben fatte.

311. Nella regola di società *composta* i guadagni o le perdite sono proporzionali ai prodotti dei capitali parziali per i rispettivi tempi in cui sono stati impiegati.

Perchè è chiaro che se i capitali ed i tempi dei socii fossero eguali, i guadagni parziali sarebbero ancora eguali; ma se il capitale ed il tempo di uno è doppio, triplo, ec. del ca-

pitale o del tempo di un' altro, il guadagno sarà pure doppio, triplo, ec. del guadagno dell' altro ; ed il prodotto del capitale per il rispettivo tempo di uno , sarà anche doppio , triplo ec. del prodotto del capitale pel rispettivo tempo dell' altro; perciò i guadagni saranno proporzionali ai prodotti dei capitali per i rispettivi tempi. Quindi la regola per trovare i capitali parziali è la seguente.

Si facciano i prodotti dei capitali parziali per i rispettivi tempi e si sommino; poi si stabilisca la proporzione : somma dei detti prodotti sta a ciascuno di essi , come il guadagno totale sta a guadagno parziale corrispondente.

Esempio. — Una persona ha messo in negozio un capitale di 3580 lire, e dopo 8 mesi associa con sè un' altra persona che v' impiega un capitale di 5000 lire , e dopo un anno vi associa una terza persona con un capitale di 8000 lire ; trascorsi due anni si fa il conto per vedere l' utile ottenuto, che si trova di 965 lire. Si domanda come debba distribuirsi quest' utile fra i socii.

Si faranno i prodotti dei capitali parziali 3580, 5000, 8000 per i rispettivi tempi in cui sono stati impiegati , cioè per 24 mesi , 16 mesi , e 12 mesi ; e questi prodotti saranno 3580×24, 5000×16, 8000×12; dunque il guadagno deve dividersi proporzionalmente a questi prodotti , e siccome in questo esempio essi sono tutti divisibili per 10, per 8, e per 2, fatte tali divisioni, il loro rapporto non si altera, e vengono eguali a 179×3, 500, 100×6, ossia 537, 500, 600; perciò il guadagno deve ripartirsi proporzionalmente ai numeri 537, 500, 600; quindi per le ragioni dette nella regola di società semplice, dobbiamo sommare questi tre numeri e si ha per somma 1637; poi indicando con x, y, z i guadagni del primo, secondo, e terzo socio, si debbono stabilire le proporzioni

$$1637 : 537 :: 965 : x ,$$
$$1637 : 500 :: 965 : y ,$$
$$1637 : 600 :: 965 : z ;$$

da cui si ricava $x = 316{,}56$, $y = 294{,}74$, $z = 353{,}69$.

312. Evvi ancora il seguente metodo per risolvere le questioni di società composta, che applichiamo all' esempio precedente.

Si riferiranno i capitali ad un medesimo tempo che sia parte aliquota dei tempi in cui sono stati impiegati; potremo perciò riferirli ad un mese (sebbene in questo esempio sarebbe più semplice riferirli a 4 mesi). Poi osservando che il capitale di 3580 lire del primo socio

è stato impiegato per 2 anni, ossia per 24 mesi, si dirà: il frutto che dà il capitale di 3580 lire dopo 24 mesi equivale al frutto che dà un capitale 24 volte maggiore dopo un mese, e però il frutto che spetta al primo socio equivale a quello che percepirebbe dopo un mese dal capitale di lire 3580×24, ossia di 85920 lire.

Riguardo poi al secondo socio, siccome il suo capitale di lire 5000 è impiegato per 16 mesi, si dirà: il frutto che dà il capitale di lire 5000 dopo 16 mesi equivale a quello che dà un capitale 16 volte maggiore dopo un mese, quindi il frutto che spetta al secondo socio equivale a quello che percepirebbe dopo un mese dal capitale di lire 5000×16 ossia di 80000 lire.

Infine ragionando similmente riguardo al terzo socio; siccome il suo capitale di 8000 lire è stato impiegato per 12 mesi, si trova che il frutto il quale gli spetta equivale a quello che si ricava dopo un mese dal capitale di lire 8000×12, ossia di 96000 lire.

Dunque la quistione è ridotta alla seguente. *Tre socii hanno impiegato pel medesimo tempo i capitali di 85920 lire, di 80000 lire, e di 96000 lire; e dopo il detto tempo trovano aver guadagnato 965 lire. Si domanda il guadagno particolare che deve toccare a ciascuno.*

Questa questione risoluta come quella del n.° precedente, si troverà che i guadagni dei tre socii sono quelli scritti alla fine del detto n.°.

REGOLA DI PARTIZIONE.

313. La *regola di partizione* ha per oggetto di dividere un numero in parti proporzionali a più numeri dati.

Qui osserviamo che nella regola di società abbiamo già risoluto il detto problema, perchè in essa altro non si è fatto che dividere il guadagno totale proporzionalmente ai capitali impiegati da ciascun socio; non pertanto l'importanza dell'accennato problema ci obbliga a trattarlo sotto una veduta più generale; e però cominciamo dal dare la regola per risolverlo.

Per dividere un numero in parti proporzionali ad altri numeri dati, bisogna sommare questi numeri; e poi, per trovare la parte corrispondente a ciascuno, si stabilirà la proporzione: somma dei numeri dati sta ad uno di essi, come il numero da dividersi sta a parte corrispondente.

Perchè è chiaro che se uno dei numeri dati è metà, terza parte, ec. della loro somma, anche la parte corrispondente al detto numero sarà metà, terza parte, ec. del numero da dividersi.

Così p. e. se il numero 50 debba dividersi in parti proporzionali ai numeri 4, 5, 9; la somma di questi numeri essendo 18, indicando con x, y, z le parti di 50 corrispondenti ai numeri 4, 5 e 9, queste parti saranno date dalle proporzioni

$$18 : 4 :: 50 : x, \quad 18 : 5 :: 50 : y, \quad 18 : 9 :: 50 : z,$$

da cui si ha $x = \frac{4 \times 50}{18}$, $y = \frac{5 \times 50}{18}$, $z = \frac{9 \times 50}{18}$.

Si può osservare che le tre parti x, y, z fanno la somma data: infatti il numeratore della somma delle tre parti si riduce alla somma data 50 moltiplicata per la somma delle parti, e siccome il denominatore è la somma delle stesse parti, questa somma svanisce perchè essa è fattor comune dei due termini della frazione, e si ottiene per risultato la somma data.

Dai precedenti valori di x, y, e z si ricava un' altra regola per trovare le parti del numero da dividersi, senza stabilire le proporzioni: essa è la seguente.

La parte corrispondente ad uno dei numeri dati si ottiene moltiplicando questo numero pel rapporto del numero da dividersi alla somma dei numeri dati.

314. Allorchè sono molte le parti in cui deve dividersi la data somma, si evitano le molte divisioni, e se ne fa una sola trovando con una sufficiente approssimazione il rapporto del numero da dividersi alla somma dei numeri dati. Se la cifra a sinistra del maggiore dei numeri dati rappresenta centinaia, come p. e. se questo numero fosse 530, il rapporto conviene che sia approssimato sino ai millesimi, affinchè l' errore della parte corrispondente a questo numero fosse minore di un' unità; perchè nel prodotto mancherebbe 530 moltiplicato per una quantità minore di 0,001, quindi l' errore sarà minore di $530 \times 0,001$ ossia di 0,530, ossia di un' unità. Da qui si vede che può tenersi come regola che, se il maggiore dei numeri dati avesse la cifra a sinistra esprimente centinaia, il rapporto succennato deve essere approssimato sino ai millesimi affinchè l' errore della parte corrispondente a detto numero fosse minore di un' unità; e se l' errore si volesse minore di un decimo, o di un centesimo, il rapporto suddetto deve essere approssimato rispettivamente sino ai diecimilesimi, o ai centomilesimi.

Se poi il maggiore dei numeri dati avesse la cifra a dritta esprimente decine, l' approssimazione del detto rapporto deve avere una cifra decimale di meno; ma se esprimesse migliaia, l' approssimazione deve avere una cifra decimale dippiù. Da qui è facile scorgere come debba regolarsi quando la cifra a dritta del maggiore dei numeri dati fosse di ordine superiore alle migliaia.

315. Prima di eseguire le operazioni giova osservare se i numeri che sono proporzionali alle parti in cui deve dividersi la grandezza data avessero un fattore comune: perchè si sopprimerebbe questo fattore, e il rapporto fra i numeri non cambierebbe, e così si semplificano le operazioni, come avviene nel segnente

Prob. I. *Dovendo ripartirsi a tre comuni una tassa di lire 50000 proporzionalmente al numero delle loro anime, componendosi il primo comune di anime 8025, il secondo di anime 10500, ed il terzo di anime 15450; si domanda che parte spetta a ciascuno.*

Qui osserviamo che i numeri 8025, 10500, 15450 hanno per fattori comuni 25 e 3; perciò, sopprimendo questi fattori, la tassa dovrà ripartirsi proporzionatamente ai numeri 107, 140, 206.

Alcune volte la semplicità del rapporto fra la somma da dividersi e le sue parti fa subito risolvere la questione, come nel seguente

Prob. II. *La polvere da cannone si compone di nitro, e di parti eguali di solfo e carbone, ciascuna un sesto del nitro. Quanti chilogrammi si richieggono di ognuna di queste tre cose per fare 100 chilogrammi della detta polvere?*

Qui le parti in cui deve dividersi la somma 100 essendo proporzionali a' numeri 6, 1, ed 1, si vede subito che il nitro è i $^3/_4$ dell' intera somma; perciò si avrà bisogno di 75 chilogrammi di nitro, 12 $^1/_2$ di solfo, e 12 $^1/_2$ di carbone.

316. Consideriamo adesso un caso più complicato.

Se una grandezza deve dividersi in parti, p. e. in tre, che indico con x, y, e z; e ciascuna di queste varia in ragion diretta di due quantità r ed s, ed in ragione inversa di un' altra t, ognuna delle tre parti x, y, z sarà proporzionale (n.° 301) al prodotto $r \times s \times \frac{1}{t}$; perciò, se indichiamo con r', s', t' i valori di r, s, t corrispondenti alla parte x, e con r'', s'', t'' quelli corrispondenti ad y, e con r''', s''', t''', quelli corrispondenti a z; si avrà che le parti x, y, z sono proporzionali a' prodotti $r' \times s' \times \frac{1}{t'}$, $r'' \times s'' \times \frac{1}{t''}$, $r''' \times s''' \times \frac{1}{t'''}$. Adunque bisognerà dividere la grandezza proposta in parti proporzionali ai prodotti succennati.

317. Con questi antecedenti si risolvono facilmente le quistioni di società composta; perchè si vede che la rata di ciascun socio varia in ragion diretta del suo capitale e del tempo corrispondente.

Passiamo adesso a' seguenti esempi.

Prob. III. *Tre socii intraprendono la traduzione di un' opera classica, impiegandovi tutti danaro e fatica. Il primo v' impiega 2000 lire, il secondo 1200, ed il terzo 3000. Il primo poi traduce 500 pagine dell' opera, il secondo 800, ed il terzo 300. Terminata l' opera, e vendute tutte le copie, trovano aver guadagnato 7000 lire. Si domanda come debba distribuirsi un tal guadagno fra i socii.*

È chiaro che la rata di ciascun socio è in ragion diretta del danaro e della fatica che esso v' impiega; perciò il guadagno 7000 deve dividersi proporzionalmente ai nominati prodotti, ovvero a' numeri 50, 48, e 45 che ne risultano dopo aver soppresso i fattori comuni.

Se vi concorresse un quarto socio, ma col solo aiuto pecuniario di 3000 lire, senza occuparsi della traduzione dell' opera, allora converrebbe valutare in danaro la fatica di traduzione fatta da' tre primi socii, ed aggiungerla a' rispettivi capitali parziali da essi impiegati. Così, per esempio, supponendo che il lavoro di traduzione sia stimato 2500 lire, bisognerà dividere questi 2500 lire in parti proporzionali ai lavori rispettivi de' tre socii, cioè a' numeri 500, 800, e 300, ossia a' numeri 5, 8, e 3, il che fatto, si troverà che le fatiche di traduzione equivalgono rispettivamente a lire 781,25, a lire 1250, ed a lire

468,75. Aggiungendo poi questi numeri a' rispettivi capitali de' tre primi socii, i capitali diverranno 2781,25, 1450, e 3468,75. Adunque il problema si è ridotto a dividere il guadagno proporzionalmente ai capitali di lire 2781,25, 2450, 3468,75, e 3000 impiegati da' quattro socii.

Prob. IV. *Dovendosi riattare con molta fretta una fortezza, si è convenuto che la totalità del prezzo sarà distribuita a quattro appaltatori in ragion diretta della quantità e della qualità del lavoro; ed in ragione inversa del tempo impiegato ad eseguirlo. Si domanda come regolarsi la distribuzione* (*).

Si dinotino con x, y, z, u, le rate de' quattro appaltatori. Sieno 10, 15, 9, 36 i tempi corrispondenti impiegati ad eseguire i rispettivi lavori; e sieno 20, 30, 15, 54 le rispettive quantità di lavoro; le qualità poi sono proporzionali ai prezzi dell' unità di lavoro, perciò se i prezzi dell' unità di lavoro di ciascun appaltatore sono rappresentati dai numeri 25, 27, 28, 24, le qualità saranno proporzionali a questi numeri. Adunque, per quel che si è stabilito di sopra, le rate x, y, z, u saranno rispettivamente proporzionali a' numeri

$$\frac{20\times25}{10},\ \frac{30\times27}{15},\ \frac{15\times28}{9},\ \frac{54\times24}{36};$$

e supprimendo i fattori comuni, e riducendo al medesimo denominatore, verranno infine proporzionali a' numeratori 75, 81, 70, 54: perciò la totalità del prezzo deve dividersi in parti proporzionali a questi numeri.

Prob. V. *Il direttore di un collegio, per incoraggiare i giovanetti a ben condursi, promette loro un premio da distribuirsi in ragion diretta del profitto nello studio e della buona condotta morale, ed in ragione inversa delle loro età. Si domanda come debba farsi la ripartizione.*

Supponiamo che sieno cinque i concorrenti a questo premio, ed i rispettivi profitti segnati in punti da' loro istruttori sieno 35, 26, 40, 30, 40: la loro condotta morale, segnata anche in punti, sia rappresentata da' numeri 5, 9, 8, 11, 13; e le loro età sieno di anni 14, 13, 15, 15, 16.

Dietro i principii appresi, il premio dovrà distribuirsi proporzionalmente a' numeri $\frac{35\times5}{14}$, $\frac{26\times9}{13}$, $\frac{40\times8}{15}$, $\frac{30\times11}{15}$, $\frac{40\times13}{16}$, e semplificando, e riducendo al medesimo denominatore, dovrà distribuirsi in parti proporzionali a' loro numeratori, e quindi a' numeri 75, 108, 128, 132, 195.

(*) Questo problema l' abbiamo estratto dall' aritmetica del *sig. Amante*, per far notare che s' incorrerebbe in errore se, come egli ha fatto, si sostituissero a' tempi totali quelli in cui si sono eseguite le unità di lavoro. Difatti egli trova per risultati i numeri inesatti 250, 405, 175, 486, diversi da' nostri.

REGOLA DELLE MESCOLANZE, O DI ALLIGAZIANE.

318. La *regola di alligazione* ha per oggetto di risolvere i problemi relativi alle mescolanze de' liquidi o di altre materie (*).

Noi qui tratteremo le quistioni che possono risolversi con l'aritmetica, esrendovene altre affini che sono proprie del dominio dell' algebra.

I. *Si vogliono mescolare 16 barili di vino del prezzo di 10 lire il barile con 15 di quello di 12 lire il barile, e con 28 di quello di 9 lire il barile. Si domanda qual sia il prezzo di un barile del vino mescolato.*

Scrivendo i dati come si vede qui affianco, osserviamo che il prezzo di un barile del primo vino essendo 10 lire, il prezzo di 16 barili sarà 10×16, ossia

bar.	*prezzi corrispondenti*
16 . . .	$10\times16=160$
15 . . .	$12\times15=180$
28 . . .	$9\times28=252$
som. 59	592

160 lire. Similmente si scorge che il prezzo dei 15 barili del secondo vino sarà 12×15, ossia 180 lire, e che il prezzo de' 28 barili del terzo vino sarà 9×28, ossia 252 lire.

Sommando ora tutti i barili de' vini mescolati, la loro somma sarà 59; e sommando pure i loro prezzi, si avrà che il prezzo totale de' 59 barili è 592 lire. Quindi si vede che, se 59 barili costano 592 lire, il prezzo della 59^{ma} parte, cioè di un barile, sarà la 59^{ma} parte del prezzo totale, cioè si ottiene dividendo 592 per 59; eseguendo la divisione si troverà il prezzo di un barile eguale a lire 10,03.

Adunque. *Per ottenere il prezzo dell'unità della mescolanza, bisogna dividere il prezzo di tutto il mescuglio per il numero delle unità che esso contiene.*

319. L' ottone è una lega di rame e zinco nel rapporto di 2 : 1; ma nelle 100 parti che lo compongono si fanno entrare 64 parti di rame, 33 di zinco, $1\,{}^{1}/_{2}$ di stagno, ed $1\,{}^{1}/_{2}$ di piombo; servendo lo stagno a dar maggior durezza all' ottone, ed il piombo a renderlo più facile a lavorarsi. Ciò posto:

(*) Si dice regola di *alligazione* per le molte applicazioni che se ne fanno a' problemi relativi alle *leghe*; chiamandosi *lega* il mescuglio che nasce dal fondere insieme più metalli.

II. *Si domanda quanto costi un rotolo di ottone formato di rame, zinco, stagno, e piombo con le proporzioni precedenti, dovendosi pagare il rame a lire 2,65 il chilogrammo, lo stagno a lire 2,90, lo zinco a lire 0,75, ed il piombo a lire 0,60.*

Il bronzo è una lega di rame e stagno in diverse proporzioni, secondo i diversi usi a cui serve. Quello delle campane si compone da 78 parti di rame e 22 di stagno. Quello de' cannoni si compone da 100 parti, di cni 86 di rame ed 11 di stagno, potendosi porre nelle 100 parti anche 3 centesimi di zinco ed una di ferro. Quello delle medaglie si compone similmente, potendosi lo stagno diminuire sino a 6 centesimi, aumentando il rame sino a 92, o 93 centesimi. Qnello delle statue si forma da parti 91,40 di rame, 1,70 di stagno, 5,53 di zinco, ed 1,37 di piombo.

Ciò premesso, applichiamo a questa nltima lega il seguente esempio.

III. *Si deve formare una statua per la quale bisognano 220 chilogrammi di bronzo composto di rame, stagno, zinco, e piombo con le proporzioni anzidette, essendo i prezzi de' detti metalli gli stessi che nel problema precedente; si domanda che quantità si richiegga di ciascuno de' medesimi metalli, ed a quanto ascenda il prezzo dei 220 chilogrammi di bronzo da fondersi.*

Risposta: chilogrammi 201,08 di rame, 3,74 di stagno, 12,166 di zinco, e 3,014 di piombo; il prezzo poi dei 220 chilogrammi di bronzo è lire 554,6409.

320. Passiamo ora alle quistioni in cui si vuol conoscere in che rapporto debbansi mescolare due sostanze, affinchè il mescuglio soddisfi una data condizione.

Ecco la regola per risolvere i problemi di questa natura.

La sostanza di minor prezzo deve stare a quella di maggior prezzo, come l' eccesso del prezzo maggiore sul medio sta all' eccesso del medio sul minore.

Dimostriamo qnesta regola sul seguente esempio.

IV. *In qual rapporto bisogna mescolare due quantità di vino, una di 16 lire il barile, e l' altra di 25 lire, per formare 100 barili del prezzo medio di 20 lire.*

Indichiamo con x la cercata qnantità di vino di minor prezzo, e con y quella di maggior prezzo. È chiaro che su di x barili di vino che vogliono vendersi a 20 lire, mentre costano a 16 lire, vi saranno di guadagno lire $4 \times x$; e su di y barili che vogliono vendersi a 20 lire, mentre costano a 25 lire, vi sarà di perdita lire $5 \times y$. Ora su tutti i barili $x+y$ che debbono vendersi a 20 lire non vi deve essere nè guadagno nè perdita, cioè si deve ottenere lo stesso prezzo di qnello che si ottiene vendendo x barili a 16 lire, ed y barili a 25 lire; ma ciò avviene solo quando il guadagno che si ha sugl' x barili pareggia la perdita che si ha sngl' y barili, ossia quando $4 \times x = 5 \times y$, da cui si ricava (n.° 280) la proporzione $x : y :: 5 : 4$; quindi il numero dei barili di minor prezzo deve stare al numero di quelli di maggior prez-

zo, come l'eccesso del prezzo maggiore sul medio sta all'eccesso del prezzo medio sul minore.

Dunque nel presente esempio bisogna dividere 100 in due parti x ed y proporzionali ai numeri 5 e 4; e la parte x che viene eguale a $55\ {}^5/_9$ indica il numero dei barili del prezzo di 16 lire i quali debbono mescolarsi con la parte $y = 44\ {}^4/_9$ che indica il nmero dei barili del prezzo di 25 lire, affinchè la miscela valga 20 lire il barile.

Nei problemi di questa natura le quantità che bisogna prendere delle due diverse sostanze sogliono riferirsi all'unità. Così nel nostro esempio volendosi trovare le parti x ed y di un barile del prezzo medio di 20 lire, bisogna dividere 1 in due parti x ed y proporzionali ai numeri 5 e 4, perciò queste parti sono due frazioni che hanno per numeratori gli stessi numeri 5 e 4, e per denominatore la loro somma 9; cioè si avrà $x = {}^5/_9$ ed $y = {}^4/_9$ del barile. Vale a dire che la parte x è i ${}^5/_9$ della cosa da dividersi, e la parte y è i ${}^4/_9$ della medesima cosa; tal che se la cosa a dividersi fosse 30, si avrà la parte

$$x = \frac{30 \times 5}{9}, \text{ e la parte } y = \frac{30 \times 4}{9}.$$

V. *Qual quantità d'acqua deve mescolarsi in 24 barili di vino di 45 carlini il barile, affinchè il prezzo si abbassi a 32 carlini il barile?*

Qui è chiaro che bisogna considerare il prezzo dell'acqua come se fosse di zero carlini il barile; quindi il prezzo maggiore è di 45 carlini il barile, il medio di 32, ed il minore di zero carlini; adunque possiamo applicare a questo problema lo stesso ragionamento del problema precedente, e si troverà che l'acqua deve mescolarsi col vino di 45 carlini il barile, nel rapporto di 13 : 32; e siccome quì il quantitativo della sostanza di maggior prezzo è dato, ed è 24 barili, la sola incognita è la quantità di minor prezzo che indichiamo con x; laonde la quantità di acqua da mescolarsi nei 24 barili vien data dalla proporzione $13 : 32 :: x : 24$, e risulta eguale a $9\ {}^3/_4$.

VI. *In qual rapporto debbono mescolarsi due masse di argento una del titolo di 0,835, e l'altra del titolo di 0,925, per farne una terza del titolo di 0,900?*

La regola per risolvere questo problema è quella stessa che si è data per i due precedenti: cioè *la massa di minor* titolo deve stare a quella di maggiore titolo come l'eccesso del titolo maggiore sul medio all'eccesso del titolo medio sul minore. Perciò per formare un chilogrammo d'argento del titolo medio, indicando con x la quantità di minor titolo, e con y quella di maggior titolo, deve aversi la proporzione $x : y :: 25 : 67$; dunque un chilogrammo deve comporsi dalle due parti una x di minor titolo, e l'altra y di maggior titolo, proporzionali ai numeri 25 e 67, quindi le parti che si richieggono sono $x = {}^{25}/_{92}$ ed $y = {}^{67}/_{92}$ di chilogrammo.

La dimostrazione della prefata regola fatta nel problema IV non è facilmente applicabile al presente problema; crediamo perciò utile replicarla adattandola a questo esempio.

Essendo 67 millesimi l'eccesso dell'oro puro del titolo medio sul minore, e 25 millesimi l'eccesso dell'oro puro del titolo maggiore sul medio, si dirà: Se un' unità di peso, p. e, un grammo di oro del minor titolo, contiene 67 millesimi di meno di oro puro di quanto ne contiene un grammo del titolo medio, x grammi di oro del minor titolo debbono contenere millesimi $67 \times x$ di meno di x grammi di oro del titolo medio. Per la stessa ragione, y grammi di oro del maggior titolo debbono contenere $25 \times y$ millesimi di oro puro di più di quanti ne contengono y grammi del titolo medio. Perciò, se le masse x ed y fossero tali che ciò che contiene di meno di oro puro la prima, pareggiasse ciò che contiene dippiù la seconda, le due masse x ed y unite conterrebbero giusto tanto di oro puro quanto ne deve contenere la massa $x+y$ del titolo medio. Dunque la massa $x+y$ sarà del titolo medio se le due parti x ed y sono tali che $0,67 \times x = 0,25 \times y$, cioè se $x : y :: 25 : 67$. Ed ecco dimostrato che *la massa* x *di minor titolo sta alla massa* y *di maggior titolo, come l'eccesso del titolo maggiore sul medio sta all'eccesso del titolo medio sul minore.*

VII. *Che quantità di rame bisogna porre in 20 libbre d'oro del titolo di 0,996, affinchè si abbassi il titolo a 18 carati, ossia a 0,750?*

Qui è manifesto che bisogna considerare il rame come il metallo il cui titolo è *zero*; perciò il titolo maggiore è 0,996, il medio è 0,750, ed il minore è *zero*. Applicando a questi dati il ragionamento del problema precedente, si avrà che il rame deve mescolarsi all'oro nel rapporto di 246 : 750, ossia di 41 : 125, e perciò il rame da mescolarsi vien dato dalla proporzione $x : 20 :: 41 : 125$, e viene eguale a libbre $6\,{}^{14}/_{25}$.

DEL MEDIO ARITMETICO.

321. Si chiama *medio aritmetico*, *o media* fra più quantità, il quoziente che si ottiene dividendo la somma delle quantità pel loro numero.

Così, per esempio, il medio aritmetico fra 8, 10, 13, 18 sarà $\frac{8+10+13+18}{4} = 12\,{}^{1}/_{4}$; ed il medio aritmetico fra 4, 8, 10, 12, 16 sarà $\frac{4+8+10+12+16}{5} = 10$, cioè sarà uno degli stessi numeri dati.

Parimenti: se p. e. 4 fanciulli avessero le rispettive età di anni 12, 13, $14\,{}^{1}/_{2}$, e 15, l'età media fra queste età sarebbe

$$\frac{12+13+14^{1}/_{2}+15}{4} = 13\,{}^{5}/_{8}.$$

Il prezzo di un' unità della mescolanza trovato nel n.° 318, il quale chiamasi *prezzo medio* perché compreso fra il massimo ed il minimo prezzo, non è che un medio aritmetico fra i diversi valori di tutte le unità contenute nelle grandezze date.

In generale, si dice anche *medio* fra più numeri, ogni numero compreso fra il più grande ed il più picciolo di essi.

Spesso avviene che il medio aritmetico è un numero di cui si fa uso invece di un altro, il quale non può ottenersi con precisione. Così, per esempio, allorchè bisogna misurare una grandezza, il cui valore è necessario che si abbia prossimo per quanto più è possibile all' esattezza; siccome un tal valore non può mai ottenersi esatto, a cagione de' mezzi imperfetti che noi abbiamo, per approssimarci il più che si possa al vero valore, si dà la seguente regola: *Si misura più volte la grandezza in parola, e poi la somma di tutte le misure ottenute si divide pel numero che indica quante volte si è misurata;* e così viene a prendersi il medio aritmetico di tutte le misure ottenute.

Per dar ragione di questa regola, indichiamo la grandezza da misurarsi con x, e supponiamo che essa siasi misurata 5 volte, e siansi avute tutte misure eccedenti. È chiaro che la somma di queste misure sarà uguale a 5 volte x più la somma degli eccessi; e però una tal somma dividendosi per 5, si avrà un quoziente uguale ad x più la quinta parte della somma degli eccessi, la quale quinta parte sarà una grandezza intermedia all' eccesso massimo ed al minimo: adunque si otterrà per misura di x una grandezza che supera x di una quantità compresa fra l' eccesso massimo ed il minimo di quelli ottenuti.

Così, pure se le misure fossero state tutte in difetto, il medio sarebbe venuto uguale alla grandezza x meno la quinta parte della somma de' difetti; e questa quinta parte sarà intermedia fra il massimo ed il minimo de' difetti ottenuti.

Ma ordinariamente avviene che le misure sono parte in eccesso e parte in difetto; perciò la loro somma sarà uguale a 5 volte x più la somma degli eccessi meno la somma de' difetti, quale differenza fra somma degli eccessi e somma de' difetti sarà una quantità molto picciola, specialmente quando la grandezza x siasi misurata molte volte; perchè allora avendosi parecchi eccessi e parecchi difetti, è più facile a combinarsi che ciascuno degli eccessi si trovi presso a poco uguale a ciascuno de' difetti, e quindi la differenza fra la somma degli eccessi, e la somma de' difetti, riducendosi quasi a zero, il medio si riduce prossimamente uguale alla grandezza x.

REGOLA CONGIUNTA.

322. Allorchè più grandezze omogenee non si riferiscono alla stessa unità, ma si conosce che un certo numero di unità della prima equivale ad un certo numero di unità della seconda, e che un certo numero di unità della seconda equivale ad un certo numero di unità della terza, e così di seguito sino all' ultima grandezza; la regola che insegna a trovare il rapporto fra un' unità della prima ed un' unità dell' ultima dicesi *regola congiunta,* perchè le quantità date sono con-

giunte fra loro con un rapporto conosciuto. Essa quando si applica alle monete suole chiamarsi regola de' *cambi*.

Conoscendosi per esempio che, a un dipresso, 71 *yards* inglesi equivalgono a 200 *piedi* di Parigi, e che 157 piedi di Parigi equivalgono a 51 metri, e che 50 metri equivalgono a 189 palmi napolitani; si domanda quanto sia il yards rispetto al palmo napolitano.

Scrivendo le date relazioni come si vede qui di contro, si otterrà il valore di un yards rispetto al palmo, dividendo il prodotto de' numeri che sono nella seconda colonna pel prodotto de' numeri che sono nella prima colonna; e quindi

71 *yar.* = 200 *pie.*
157 *pie.* = 51 *met.*
50 *met.* = 189 *pal.*

si avrà 1 *yards* $= \frac{200 \times 51 \times 189}{71 \times 157 \times 50}$ di *palmo* = *palmi* 3,45.

Dim. Difatti, scrivendo i rapporti fra le date quantità come si vede qui di contro, si deduce (n.° 171) che

1 *yar.* $= \frac{200}{71}$ *di pie.*
1 *pie.* $= \frac{51}{157}$ *di met.*
1 *met.* $= \frac{189}{50}$ *di pal.*

1 *yards* $= \frac{200 \times 51 \times 189}{71 \times 158 \times 50}$ di *palmo* = *palmi* 3,46.

Viceversa, si vede che se volesse conoscersi quanto sia il palmo rispetto al yards, bisogna dividere il prodotto de' numeri che sono nella colonna a dritta, pel prodotto di quelli che sono nella colonna a sinistra; e si avrà 1 *pal.* = 0,29 *yar.*

298. Aggiungiamo per esercizio un altro esempio.

Conoscendosi che 432 *ducati* di Svezia equivalgono a 1000 *ristalleri* di Danimarca, e che 3 *ristalleri* equivalgono a 4 *talleri* di Prussia, e che 100 *talleri* di Prussia equivalgono a *ducati* 87,4 di Napoli; si domanda un ducato di Svezia quanto sia rispetto al ducato napolitano.

Scrivendo le quantità date come si scorge qui a fianco, ed operando come si è fatto nell'esempio precedente, si trova che

432 *duc. di Sv.* = 1000 *ristal.*
3 *ristal.* = 4 *tal.*
100 *tal.* = 87,4 *duc. nap.*

1 *duc. di Sv.* $= \frac{1000 \times 4 \times 87{,}4}{432 \times 3 \times 100} = \frac{10 \times 87{,}4}{108 \times 3} =$ *duc. nap.* 2,70.

L' *arbitraggio* non è che un' applicazione della regola congiunta; e consiste ordinariamente nell' arbitrio o agevolazione per far pagare in un paese lontano una valuta in moneta corrente in questo paese, mediante un rilascio del tanto per cento alla Casa di commercio, o a colui che si obbliga di fare il detto pagamento.

REGOLA DI FALSA POSIZIONE.

299. La regola di *falsa posizione* è quella che insegna a trovare il vero valore dell' incognita, mediante un valore falso che si assume come vero.

Essa risolve quei problemi le cui condizioni si riducono ad eguagliare due quantità, fra le quali si trova l' incognita combinata con i numeri noti per mezzo di somma, di sottrazione, di moltiplicazione, e di divisione, o per mezzo di una o di alcune di queste operazioni.

Si dice di *semplice falsa posizione*, quando bisogna assumere un sol valore per l' incognita per dedurne il vero, e ciò avviene allorchè l' incognita si trova in una sola delle quantità che debbono essere eguali, senza essere combinata con i numeri noti per mezzo di somma o di sottrazione. Negli altri casi si dice di *doppia falsa posizione*; perchè bisogna assumere due valori per l' incognita, onde dedurne il vero.

Per risolvere un problema di semplice falso, si prende un numero ad arbitrio per l' incognita, e si vede se esso soddisfa alle condizioni del problema; se le soddisfa, esso sarà il vero valore dell' incognita; ma se conduce ad un risultato falso, si troverà il vero mediante la proporzione: Risultato falso ottenuto sta al vero dato, come il numero falso posto per l' incognita sta al vero valore di questa.

Ciò vien dichiarato da' seguenti esempi.

I. *Si hanno tre mole, la prima delle quali macina 4 tomoli di frumento in ogn' ora, la seconda 6, e la terza 9, in quanto tempo macineranno 360 tomoli, agendo tutte simultaneamente?*

Si assume un numero a piacere per l' incognita, per esempio 10, e si verifica se esso soddisfa alle condizioni del problema. Perciò si avrà che la prima mola in 10 ore macinerà tomoli 4×10, la seconda ne macinerà 6×10, e la terza 9×10; dunque le tre mole macineranno contemporaneamente 190 to-

moli ; quindi il numero 10 posto invece dell'incognita è falso, perchè conduce al risultato falso 190, e non già al vero 360. Dopo ciò per avere il numero vero, si stabilirà la proporzione seguente: risultato falso 190 sta al vero 360, come la falsa posizione 10 sta alla vera ; e così troverà la vera eguale a 18 $^{18}/_{19}$.

Per più semplicità avrebbe potuto prendersi 1 per falsa posizione.

Dim. Se dinotiamo con x l' incognita, le condizioni del problema sono $4\times x+6\times x+9\times x=360$, ossia $19\times x=360$. Perciò indicando con p la falsa posizione, e con R il risultato falso, si avrà $19\times p=R$; è dividendo questa eguaglianza per l'altra $19\times x=360$, si avrà $\frac{19\times p}{19\times x}=\frac{R}{360}$, ossia $\frac{p}{x}=\frac{R}{360}$; la quale fa vedere che il risultato falso sta al vero come la falsa posizione sta alla vera. Lo stesso ragionamento si applicherebbe a qualunque altro esempio.

II. *Interrogato Caio del guadagno fatto in un negozio rispose: Un terzo, più un quarto, più un quinto del guadagno fanno 1880 lire.*

Prendiamo per semplicità 1 per falsa posizione, e si troverà per risultato falso $\frac{47}{60}$; perciò la proporzione $\frac{48}{60}$: 1880 : : 1 : x darà il numero cercato, che viene eguale a 2400 lire.

Per evitare le frazioni si potrebbe prendere per falsa posizione un numero divisibile per tutti i denominatori, come sarebbe il loro prodotto, che in questo caso è 60.

III. *Un servo non danaro quando gli fu pagato il salario di 3 mesi; dopo due altri mesi consumò la metà del detto salario, ma esigendosi quello di questi due mesi, si trovò di possedere in tutto lire 107,40. Si domanda quanto gli dava al mese il suo padrone.* Risposta: 30,60.

300. Vi sono talune questioni com' è p. e. la seguente, in cui, senza eseguir calcolo, si può giungere col solo ragionamento a trovare come il valore dell' incognita si forma per mezzo delle quantità note.

IV. *Tizio morendo lascia la moglie incinta, e dispone nel testamento che se nascerà un maschio la sua eredità sia divisa in modo che il figlio ne abbia i due terzi, e la madre un terzo; ed il contrario si faccia se nascerà una femmina. Nasce un maschio ed una femmina: si domanda come dividersi l'eredità.*

Siccome l' idea del testatore è che il figlio abbia il doppio della figlia; in questo caso in cui esiste il figlio e la figlia, al primo toccherà il quadruplo della seconda; perciò 4 parti dell' eredità debbono essere del figlio, 2 della madre, ed una della figlia : cioè la parte della figlia è il settimo dell' intera eredità.

310. Passiamo ora alle questioni di falso doppio , per le quali deve tenersi la seguente regola.

Si prendano due numeri ad arbitrio, e si sperimenti se essi soddisfano le condizioni del problema; se uno di essi le soddisfa, sarà il numero cercato; se no, si noti l'errore di cui una quantità differisce dall'altra che dovrebbe esserle eguale nella prima posizione, e si noti anche l'errore analogo nella seconda posizione; si osservi se gli errori sono simili, cioè ambedue in eccesso o in difetto; poi si moltiplichi ciascuna posizione per l'errore dell'altra,

e la differenza dei prodotti si divide per la differenza degli errori se gli errori sono simili; ma se sono dissimili la somma dei prodotti si divide per la somma degli errori; nell' uno e nell'altro caso il quoziente sarà il numero cercato: Passiamo agli esempi

I. *Interrogato Pitagora del numero dei suoi discepoli, rispose: La metà studia Geometria, un quarto Filosofia, ed un settimo ama solo di ascoltare, e tre nuovi ne ho avuti ad istruire.*

Prendiamo 1 per falsa posizione, e si avrà che $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+3$, ossia $3+\frac{25}{28}$ dovrebbe essere eguale ad 1; ma si trova che supera 1 di 2 e $\frac{25}{28}$, perciò l'errore $2\ \frac{25}{28}$ è in eccesso.

Prendiamo ora per falsa posizione 56 che è divisibile per tutti i denominatori, e si avrà che 28 . 14+8+3, ossia 53 dovrebbe essere eguale a 56; ma si trova che è minore di 56 di 3 unità: dunque l' errore è in meno. Ora moltiplichiamo la prima posizione 1 pel secondo errore 3, e la seconda posizione 56 pel primo errore $2\ \frac{50}{56}$, e perchè gli errori sono dissimili dividiamo la somma dei prodotti e che è 3+162 per la somma degli errori, che è $5\ \frac{50}{56}$; il quoziente 28 che si ottiene è il numero cercato.

II. *Un cacciatore scommette con un locandiere che per ogni tiro in cui colpisce il bersaglio gli verrebbero pagati 20 soldi dal locandiere; e per ogni tiro che fallisse, egli pagherebbe al locandiere 15 soldi. Dopo 15 tiri il cacciatore si trova aver guadagnato 90 soldi. Quanti sono stati i tiri felici?* Risposta: *9*.

III. *Un padre tiene 34 anni ed il figlio 5. Dopo quanti anni l'età del padre sarà quadrupla di quella del figlio?* Risposta: dopo 4 anni ed 8 mesi.

302. Per dimostrare la regola di falso doppio dobbiamo introdurre alcune denominazioni che sono proprie d'Algebra.

Si chiama *equazione* l'uguaglianza di due quantità le quali contengono un ignota il cui valore deve soddisfare l'uguaglianza, cioè deve far divenire il primo membro eguale al secondo. Così p. e avendosi l'eguaglianza $5\times x+7-\frac{x}{4}=1-\frac{x}{2}+\frac{1}{5}$ che contiene l'incognita x il cui valore deve esser tale che, da x moltiplicata per 5 toltone 2, ed aggiungendovi un terzo di x, il risultato sia eguale ad 1 meno un mezzo di x più $^1/_3$; quest'eguaglianza dicesi *equazione*. Tutte le quantità che stanno a sinistra de segno = formano il *primo membro* dell'equazione e quelle che stanno a dritta formano il *secondo membro*; diconsi poi *termini* dell'equazione le quantità $5\times x$, 2, $\frac{x}{2}$, 1, $\frac{x}{2}$, $\frac{1}{3}$ che sono separate da' segni + o —.

303. Abbiamo detto che nella regola del falso le condizioni del problema si riducono ad eguagliare due quantità le quali contengono l' incognita; questa eguaglianza dunque è un' equazione.

Allorchè le quantità sono indicate da lettere e debbono moltiplicarsi fra loro o per un numero, si scrivono per semplicità i

fattori uno vicino all'altro senza segno di moltiplicazione, ed il fattore numerico si pone a sinistra. Così p. e. se le quantità fossero a ed x, invece di scrivere $a\times x$, $7\times x$, $\frac{2}{3}\times x$, si scriverà, ax, $7x$, $\frac{2}{3}x$.

Passiamo ora a dimostrare la regola di falso doppio.

Siccome questa regola differisce da quella di falso semplice in ciò che l'incognita si trova in ambedue i membri dell'equazione, o in un solo, combinata con le note per mezzo di somma o sottrazione, tutti i termini con l'incognita che sono in un membro potranno ridursi ad un solo, dove l'incognita è moltiplicata per un numero che dinotiamo con a, ed i termini noti riduconsi anche ad un solo che dinotiamo con b; perciò il primo membro dell'equazione prenderà la forma $ax+b$, e per la stessa ragione il secondo membro prenderà la forma $cx+d$; quindi le condizioni del problema verranno espresse dall'equazione $ax+b=cx+d$.

Così nell'equazione di sopra, il primo membro si riduce a $\frac{19x}{4}+7$, ed il secondo a $-\frac{x}{2}+\frac{6}{5}$, e perciò in essa sarebbe $a=\frac{19}{4}$, $b=7$, $c=-\frac{1}{2}$, $d=\frac{6}{5}$.

Ciò premesso, indichiamo con p e p' le due posizioni che si prendono per x, e con e ed e' i rispettivi errori di cui il primo membro differisce dal secondo; si avranno per le posizioni p e p' le due eguaglianze

$$ap+b=cp+d+e, \qquad ap'+b=cp'+d+e'$$

e togliendo da queste due eguaglianze l'equazione $ax+b=cx+d$, ne risulteranno le due equazioni

$$ap-ax=cp-cx+e, \quad \text{ed} \quad ap'-ax=cp'-cx+e',$$

ovvero $a(p-x)=c(p-x)+e$, ed $a(p'-x)=c(p'-x)+e'$;

e sottraendo $c(p-x)$ da'due membri della prima di queste equazioni, e $c(p'-x)$ da'due membri della seconda, ne emergeranno le altre due

$$a(p-x)-c(p-x)=e, \quad \text{ed} \quad a(p'-x)-c(p'-x)=e',$$

ovvero $(a-c)(p-x)=e$, ed $(a-c)(p'-x)=e'$;

e dividendo la penultima di queste equazioni per l'ultima, si avrà $\frac{p-x}{p'-x}=\frac{e}{e'}$;

e riducendo queste frazioni eguali al medesimo denominatore, verranno eguali i numeratori, cioè verrà $pe'-e'x=p'e-ex$; ed aggiungendo ai due membri ex, e togliendo pe', verrà $ex-e'x=p'e-pe'$, ossia $(e-e')x=p'e-pe'$; e dividendo per $e-e'$, si avrà infine $x=\frac{p'e-pe'}{e-e'}$.

Dunque l'incognita ha il valore prescritto nella regola.

Nel fare il calcolo gli errori si sono supposti simili, se fossero dissimili verrebbe somma nel numeratore e nel denominatore; perciò l'incognita ha sempre il valore enunciato.

CAP. XII.

ESTRAZIONE DELLE RADICI QUADRATE E CUBICHE

Composizione del quadrato di un numero

307. *Se un numero è diviso in due parti, il quadrato di tutto il numero uguale al quadrato della prima parte, più il doppio prodotto della prima per la seconda, più il quadrato della seconda.*

Sia p. e. il numero 37 diviso nelle due parti 30 e 7: dico che

$$37^2=30^2+2\times30\times7+7^2.$$

In effetti, per fare il quadrato bisogna moltiplicare $30+7$ per $30+7$, ma ciò equivale a moltiplicare $30+7$ prima per 30 e poi per 7; quindi si avrà

$$(30+7)^2=(30+7)\times30+(30+7)\times7=30^2+7\times30+30\times7+7^2$$

ma $7\times30+30\times7$ equivale a 2 volte il prodotto di 30 per 7; quindi si avrà che $(30+7)^2=30^2+2\cdot30\times7+7^2$; cioè il quadrato del numero 37 diviso nelle due parti 30 e 7 si compone del quadrato di 30, del doppio prodotto di 30 per 7, e del quadrato 7.

Lo stesso ragionamento vale per qualunque altro numero che sia diviso in due parti.

Da qui si desume che se un numero contiene decine ed unità, il suo quadrato si compone dal quadrato delle decine, dal doppio prodotto delle decine per le unità, e dal quadrato delle unità.

Così può formarsi il suo quadrato senza moltiplicare il numero per sè stesso; anzi si fa come se non vi fosse lo zero dopo la cifra delle decine, cioè come se il numero 37 invece di essere eguale a $30+7$ fosse eguale a $3+7$; e perciò sotto al quadrato di 3 si scrive il doppio prodotto di 3 per 7 in modo che esca di un posto in fuori a dritta, e scrivendo il quadrato di 7 sotto al doppio prodotto in modo che esca di un' altro posto in fuori a dritta, come si vede qui affianco; poi si sommano i tre numeri così scritti e si ha il quadrato di 37 eguale a 1369.

```
 9
 42
  49
----
1369
```

308. Facciamo osservare che i numeri quadrati perfetti sono assai rari rispetto a quelli non quadrati esatti. Così p. e. 25 essendo il quadrato di 5, e 36 il quadrato di 6, fra 25 e 36 si trovano dieci numeri non quadrati perfetti. A misura poi che due numeri interi consecutivi sono di più in più grandi, cresce la differenza fra i loro quadrati sino a divenir grandissima, ed anche maggiore di qualunque numero dato. E facile convincersi di questa verità dando un' occhiata ai quadrati de' numeri semplici, che abbiamo scritti qui appresso in corrispondenza delle loro radici,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81;

ove si vede che le differenze fra i quadrati formano la serie dei numeri dispari a contar da 3. Questa legge è vera per tutti i numeri interi. Difatti, indicando con a un qualunque numero intero, il quadrato di $a+1$ essendo a^2+2a+1, esso differisce dal quadrato di a, per $2a+1$: cioè, il quadrato di un numero intero dif-

ferisce dal quadrato del numero intero immediatamente inferiore, pel doppio di questo numero accresciuto dell' unità; perciò questa differenza è un numero dispari. Per la medesima ragione il quadrato di $a+2$ differisce da quello di $a+1$ per $2(a+1)+1$, ossia per $2a+2+1$ che è il numero dispari immediatamente maggiore di $2a+1$.

309 Alle volte si può conoscere che un numero non è quadrato esatto, senza estrarre la radice: ed ecco come.

Un numero non è quadrato esatto quando la cifra a dritta è 2, 3, 7. 8, ovvero termina con un numero dispari di zeri.

In effetti, la cifra a dritta di un quadrato deriva dal quadrato della cifra a dritta della radice; e siccome i quadrati dei numeri di una cifra non terminano mai con le cifre 2, 3, 7, 8, perciò un numero che termina con queste cifre non è quadrato esatto; e quando termina con un numero impari di zeri nè anche è quadrato esatto, perchè i zeri a dritta del quadrato sono il doppio di quelli della radice.

Estrazione della radice quadrata da' numeri interi

310. Dovendosi estrarre la radice quadrata da un numero intero supporremo primieramente che esso abbia tre o quattro cifre, e sia, per esempio; il numero 5821.

Or poichè la radice quadrata di 100 ha due cifre, il numero proposto essendo maggiore di 100, la sua radice quadrata avrà almeno due cifre, cioè conterrà decine ed unità; dunque nel proposto numero è contenuto il quadrato delle decine della radice, il doppio prodotto delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità; ma il quadrato delle decine non ha cifre significative di ordine inferiore alle centinaia, perchè tiene due zeri a dritta, perciò se distacchiamo due cifre dalla dritta del numero proposto, nel numero 58 a sinistra sarà contenuto il quadrato delle decine della radice; quindi estraendo la radice quadrata dal massimo quadrato contenuto in 58, che è 49, si avranno le decine della radice che sono 7; difatti, non possono essere più di 7, perchè se fossero 8, il quadrato di 8 decine, che è 64 centinaia, non è contenuto nelle 58 centinaia del numero proposto.

Scriviamo dunque a dritta del numero proposto le 7 decine della radice, intavolando l' operazione come qui appresso.

58,21	76
49	146
92,1	6
87 6	
4 5	

Ora se togliamo da 58 il quadrato delle 7 decine, che è 49, ed a dritta del resto 9 abbassiamo le due cifre che avevamo separate dalla dritta del numero proposto, è chiaro che nel numero 921 che ne risulta deve esser contenuto il prodotto del doppio delle decine della radice per la cifra delle unità, ed il quadrato delle unità; ma il doppio prodotto delle decine per le unità non ha cifre significative di ordine inferiore alle decine, perchè tiene un zero a dritto, perciò distaccando una cifra a dritta del nume-

ro 921, nel numero 92 a sinistra sarà contenuto il prodotto del doppio delle decine della radice per la cifra delle unità, laonde dividendo 92 per il doppio delle decine trovate, che è 14, avremo la cifra delle unità; eseguendo la divisione troviamo che 6 è la cifra delle unità, onde si deduce che 76 è la radice cercata.

Or se facciamo il quadrato delle 6 unità, ed il prodotto del doppio delle decine per la cifra delle unità, e togliamo questo quadrato e questo prodotto dal numero 921, finiremo così di togliere dal numero proposto il quadrato della sua radice 76, perchè prima ne abbiamo tolto il quadrato delle 7 decine, ed ora togliamo dal resto 921 il doppio prodotto delle decine per le unità ed il quadrato delle unità. Questa moltiplicazione e sottrazione si fa scrivendo la cifra 6 a dritta di 14, e che è il doppio delle decine, e poi si moltiplica 146 per 6, ed il prodotto si toglie da 921; e poichè si ottiene per resto 45, ne conchiudiamo che 5821 non è quadrato perfetto, e quindi 76 è la radice del massimo quadrato contenuto 5821, e 5821 supera questo massimo quadrato di 45.

311. Sia per secondo esempio ad estrarsi la radice quadrata da un numero di tre cifre, p. e. dal numero 729.

Cominciamo dall' osservare che il numero proposto essendo maggiore di 100, la sua radice deve contenere decine ed unità; perciò nel proposto numero sarà contenuto il quadrato delle decine della radice, il doppio prodotto delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità; ma perchè il quadrato delle decine è contenuto nel numero che rappresenta le centinaia, se distacchiamo le due cifre a dritta del numero 79, ed estragghiamo la radice quadrata dal numero 7 che sta a sinistra, si avranno così le decine della radice che sono chiaramente 2. Poi si toglierà il quadrato di 2 da 7, ed a dritta del resto 3 si abbasserà la coppia delle cifre che eransi distaccate, si avrà così il numero 329 in cui sarà contenuto il prodotto del doppio delle decine della radice per la cifra delle unità, ed il quadrato delle unità; perciò distaccando dalla dritta del detto numero la cifra 9 delle unità, e dividendo il numero 32 a sinistra pel doppio delle decine, che è 4, si avrà la cifra delle unità.

7,29	27
4	47
32,9	7
32,9	
00 0	

Ma qui conviene osservare che sebbene 32 diviso per 4 dà per quoziente 8, pure la cifra 8 non si può prendere per cifra delle unità, perchè essa è troppo grande, dovendo la medesima esser tale che moltiplicata per sè stessa è per 4, che è il doppio delle decine, ne risulti un prodotto che non sia maggiore di 329: in questo esempio bisogna diminuirla di una sola unità, ond' è che 7 sarà la cercata cifra delle unità. Or poichè moltiplicando 47 per 7, e togliendo il prodotto da 329 non si ottiene alcun resto, ne conchiuderemo che 27 è la radice quadrata esatta dal numero 729.

312. Avvertimento. Allorquando si fa la divisione per trovare la cifra delle unità, non vi è bisogno di moltiplicare questa cifra per

sè stessa e pel doppio delle decine della radice affin di assicurarsi se essa sia la giusta cifra. Così nell'esempio precedente essendosi diviso 32 per 4, si è avuto per quoziente 8 che si è scritto a dritta di 4 per poi moltiplicare 48 per 8 è vedere se il prodotto risultava maggiore eguale o minore di 329, affin di diminuire 8 di un'unità se risultava maggiore; ma senza fare questa moltiplicazione possiamo conoscere se 8 debba diminuirsi di un'unità; difatti, è facile scorgere che il numero 329 può considerarsi come dividendo, 48 come divisore, ed 8 come quoziente; quindi per assicurarsi che la cifra 8 sia giusta possiamo immaginarla scritta a dritta di 4, e nel fare la divisione si dirà: 4 in 32 è contenuto 8 volte senz'avanzo, ma 8 non è contenuto 8 volte in 9, dunque la cifra 8 è troppo grande, perciò essa si diminuisce di un'unità e si prende 7, e si dirà: 4 in 32 è contenuto 7 volte con l'avanzo 4 che posto avanti a 9 fa 49; il 7 in 49 è pure contenuto 7 volte, dunque 7 è la giusta cifra delle unità.

313. Passiamo ora ad estrarre la radice quadrata da un numero che abbia più di quattro cifre, ma non più di sei, e sia il numero 763498.

Cominciamo dall'osservare che il numero proposto essendo maggiore di 100, la sua radice quadrata contiene decine ed unità, e però nel proposto numero è contenuto il quadrato delle decine della radice, il doppio prodotto delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità; ma il quadrato delle decine non ha cifre significative di ordine inferiore alle centinaia quindi distaccando due cifre dalla dritta del numero proposto, nel numero 7634 a sinistra sarà contenuto il quadrato delle decine della radice; dunque per trovare queste decine bisogna estrarre la radice quadrata dal numero 7634; ma questo numero essendo di quattro cifre sappiamo estrarre la sua radice quadrata, il che effettuandosi (come si vede qui a fianco ove le sottrazioni si sono fatte a memoria come si costuma nelle divisione, e perciò si sono scritti i soli resti) troveremo che essa è 87. Or poichè tolto il quadrato delle 87 decine della radice da 7634 vi restano 65 decine, se abbassiamo a dritta di questo resto l'altra coppia di cifre, nel numero 6598 che ne risulta sarà contenuto il doppio prodotto delle decine per la cifra delle unità, ed il quadrato delle unità; ma perchè il prodotto del doppio delle decine per la cifra delle unità non ha cifre significative di ordine inferiore alle decine, se distacchiamo una cifra a dritta del numero 6598, nel numero 659 a sinistra è contenuto il prodotto del doppio delle decine per la cifra delle unità, adunque dividendo questo numero pel doppio delle decine trovate che è 174 (e che si ottiene sommando 167 con la cifra 7 che sta al di sotto) il quoziente 3 che ne risulta sarà la cifra delle unità.

```
  ' '
76,34,98 | 873
123,4    | 167
  6 59,8 |   7
 1 3 6 9 | 1743
         |    3
```

Or se moltiplichiamo 1743 per 3, cioè se facciamo il quadrato

delle 3 unità ed il prodotto del doppio delle decine per le unità, e togliamo il risultamento che si ottiene dal numero 6598, finiremo così di togliere dal numero proposto il quadrato della sua radice 873; perchè prima ne abbiamo tolto il quadrato delle 87 decine, ed ora togliamo dal resto 6598 il doppio prodotto delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità. E poichè si ottiene per resto 1369, ne conchiuderemo che il numero 763498 non è quadrato perfetto; quindi 873 è la radice del massimo quadrato contenuto in 763498.

314. Avvertimento. Se avvenisse che dopo essersi abbassata a dritta di un resto la seguente coppia di cifre del numero proposto, e dopo essersi distaccata la cifra a dritta del numero che ne emerge, il numero a sinistra di questa cifra il quale deve dividersi pel doppio della radice trovata, risultasse minore di questo doppio, allora la seguente cifra della radice sarà zero; perciò si porrà prima un zero a dritta della radice trovata, e poi si proseguirà l'operazione abbassando la seguente coppia di cifre del numero proposto.

Così p. e. dovendosi estrarre la radice quadrata dal numero 95481; dopo essersi abbassata a dritta del primo resto zero la coppia di cifre che forma il numero 54, e dopo distaccata la cifra a dritta, il numero 5 a sinistra il quale deve dividersi per 6, cioè pel doppio della radice, si trova che è minore di 6; ciò vuol dire che la cifra seguente della radice è zero (cioè la cifra delle unità della radice del numero 954 è zero, e quindi la radice del maggior quadrato contenuto in 954 è 30, ed il numero 54, che si è ottenuto abbassando le due cifre a fianco al resto zero, deve riguardarsi come l'avanzo che resta togliendo da 954 il quadraro di 30); perciò si porrà un zero a dritta della prima cifra 3 della radice, e poi a fianco al numero 54 si abbasserà la coppia seguente, e distaccando la cifra 1 dalla dritta del numero 5481 che ne risulta, nel numero 548 a sinistra sarà contenuto il prodotto del doppio delle 30 decine della radice per la cifra delle unità; dunque se dividiamo 548 pel doppio delle decine che è 60, il quoziente 9 sarà la cifra delle unità. E poichè moltiplicando 609 per 9, e togliendo il prodotto dal numero 5481 non si ottiene alcun resto, ne conchiuderemo che 309 è la radice quadrata esatta del numero 95481.

9,5´4,81´	309
0 548,1	609
	9

315. Dal ragionamento fatto per estrarre la radice quadrata da un numero di 3, o 4 cifre, e di 5, o 6 cifre, si scorge che se un numero avesse più di 6 cifre, e non più di 8, si saprà estrarre dal medesimo la radice, perchè dipende da quella di un numero di 6 cifre; e se avesse 9, o 10 cifre anche si saprà estrarre, perchè dipende da quella di un numero di 8 cifre; e così seguitando si saprà sempre estrarre la radice quadrata da qualsivoglia numero intero, o esatta, o differente della vera *a meno di un' unità*, tenendo la seguente.

Regola. *Per estrarre la radice quadrata da un numero intero,*

convien separare le sue cifre in gruppi ciascuno di due cifre, cominciando dalla dritta, e perciò quando il numero delle dette cifre è dispari, il gruppo a sinistra è di una sola cifra. Poi si estrae la radice quadrata dal maggior quadrato contenuto nel gruppo a sinistra, e questa radice sarà la prima cifra a sinistra della radice cercata. Indi il quadrato di questa cifra si toglierà dal numero espresso dal detto gruppo a sinistra, ed a dritta del resto si abbasserà il gruppo seguente, e dal numero che ne risulta si distaccherà la cifra a dritta, e la parte a sinistra del detto numero si dividerà pel doppio della cifra trovata della radice; la cifra che si avrà per quoziente sarà la seconda cifra della radice cercata, purchè scritta a dritta del detto doppio si abbia un numero che moltiplicato per la detta cifra, il prodotto possa togliersi da quel numero che si è ottenuto abbassando il seguente gruppo affianco al resto, altrimenti bisogna diminuirla di tante unità finchè la sottrazione possa eseguirsi. Fatta la sottrazione, si abbasserà a dritta del resto il gruppo seguente, e si proseguirà l'operazione con lo stesso metodo finchè non siansi abbassate tutte le coppie di cifre del numero proposto.

Se poi abbassando una coppia di cifre, il numero che deve dividersi pel doppio della radice risultasse minore di questo doppio, la seguente cifra della radice è zero; perciò si porrà un zero nel luogo che deve occupar questa cifra, si abbasserà l' altra coppia, e si proseguirà l' operazione secondo abbiam detto.

Da questa regola si desume che la radice quadrata di un numero intero avrà tante cifre, quante sono le copie in cui può dividersi il numero dato.

316. *Avvertimento.* Allorchè si estrae la radice quadrata da un numero intero non quadrato perfetto, e si vuole fare la correzione all' ultima cifra della radice, questa si può aumentare di una unità quando il resto è maggiore della radice incompleta trovata. In effetti, se indichiamo con a la radice incompleta, e con r il resto, il numero proposto è uguale ad a^2+r; ora è manifesto che la radice completa la quale è sempre compresa fra a ed $a+1$ è maggiore di $a+{}^1/_2$ quando il quadrato di $a+{}^1/_2$ è minore del numero proposto, cioè quando $a^2+a+{}^1/_4$ è minore di a^2+r, ossia quando $a+{}^1/_4$ è minore di r: il che si avvera quando a è minore di r, per essere a ed r numeri interi; perciò quando il resto è maggiore della radice incompleta trovata si può correggere l' ultima cifra della radice aumentandola di un' unità.

Estrazione delle radici quadrate dalle frazioni.

317. *La radice quadrata di una frazione è una nuova frazione che ha per numeratore la radice quadrata del numeratore, e per denominatore la radice quadrata del denominatore; perchè questa frazione moltiplicata, per sè stessa produce la proposta.*

Allorchè i termini della frazione non sono quadrati perfetti, per avere la radice quadrata della frazione a meno di una parte della unità indicata dal dato denominatore, si rende il denominatore quadrato perfetto moltiplicando i termini della frazione pel denomina-

tore; e poi si estrae la radice quadrata dal nuovo numeratore, perchè quella del denominatore è lo stesso denominatore primitivo; e se la radice del numeratore si trova a meno di un' unità, quella della frazione sarà approssimata a meno di una parte dall' unità indicata dal suo denominatore

Sia p. e. la frazione $^3/_7$ da cui voglia estrarsi la radice quadrata. Moltiplichiamo i termini pel denominatore da $^{21}/_{49}$; l'operazione si riduce ad estrarre la radice quadrata, e siccome la radice quadrata del numeratore a meno di un' unità è 4, quella della frazione è $^4/_7$ approssimata a meno di $^1/_7$, perchè è compresa fra $^4/_7$ e $^5/_7$.

318. *La radice quadrata a meno di un'unità da un numero frazionario si ottiene estraendola a meno di un'unità dall'intero contenuto in esso.*

Sia p. e. il numero frazionario $\frac{435}{8}$, ossia $54\ \frac{3}{8}$.

Il suo valore essendo compreso per due numeri interi quadrati perfetti consecutivi, uno minore e l'altro maggiore del dato numero frazionario, e siccome le radici quadrate di questi numeri interi differiscono di un' unità, la radice del dato numero frazionario che è compresa fra le radici di questi numeri interi differisce da una di esse a meno di un' unità; perciò se si estrae la radice quadrata a meno di un' unità dall' intero 54 contenuto nel numero frazionario, la quale è 7, questa sarà anche la radice quadrata a meno di un' unità del dato numero frazionario.

Estrazione della radice quadrata dai numeri per approssimazione — Numeri incommensurabili.

Sia il numero 2 da cui voglia estrarsi la radice quadrata approssimata a meno di un millesimo dell' unità.

Moltiplichiamo l' intero 2 pel quadrato di 1000, cioè pel quadrato del numero che indica il grado di approssimazione, ed estragghiamo la radice quadrata a meno di un' unità del prodotto 2000000, poi dividiamo la radice 1414 per 1000, il quoziente 1,414 che si ottiene è la radice di 2 a meno di 0,001

In effetti scrivendo 2 sotto forma frazionaria avente per denominatore l' unità, e poi moltiplicando i due termini della frazione pel quadrato di 1000, si ha $\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2 \times 1000^2}{1000^2}} = \frac{\sqrt{2000000}}{1000}$; dunque l' operazione si riduce ad estrarre la radice quadrata a meno di un' unità dal numero proposto moltiplicato pel quadrato del numero che indica il grado di approssimazione, e poi bisogna dividere la radice per questo stesso numero: così si ha che la radice di 2 è compresa fra $\frac{1414}{1000}$ ed $\frac{1415}{1000}$, ossia fra 1,414 ed 1,415; quindi 1,414 è la radice quadrata di 2 a meno di 0,001 in difetto.

Ciò che si è detto rispetto a 2 ed a 1000, vale per tutti gli altri numeri; quindi possiamo stabilire la seguente regola generale.

Per estrarre la radice quadrata approssimata da un numero a meno di una parte dell'unità indicata da n, *si moltiplichi il dato numero pel quadrato di* n, *e dal prodotto si estragga la radice quadrata a meno di un' unità, ed infine questa radice si divida per* n.

Allorchè l' approssimazione si vuole in decimali, ed il numero è intero, la precedente regola si modifica nel seguente modo:

Per estrarre la radice quadrata da un intero a meno di 0,1, di 0,01, di 0,001 ec., conviene aggiungere a dritta dell'intero un doppio numero di zeri di quanti ne ha il numero che indica il grado di approssimazione; poi si estrae la radice quadrata a meno di un' unità dal numero che ne risulta, ed infine da questa radice si separano le cifre decimali richieste.

Sia p. e. il numero 85 da cui si vuole estrarre la radice quadrata a meno di 0,01. Aggiungiamo quattro zeri a dritta di 85, e dal numero 850000 che ne risulta estragghiamo la radice quadrata a meno di un'unità, che si trova eguale a 927, da cui separando due cifre decimali si ha la radice di 85 eguale a 9,27 a meno di 0,01.

Se il numero da cui si estrae la radice è decimale, la regola è la seguente:

Si rende il numero delle cifre decimali doppio del numero delle cifre decimali che si vogliono nella radice, con aggiungere zeri a dritta di esso, o con sopprimere cifre decimali della sua dritta; poi dal numero che ne risulta considerato come intero si estrae la radice quadrata a meno di un' unità, ed infine da questa radice si separano le cifre decimali richieste.

Così p. es. la radice quadrata del numero decimale 68, 955 a meno di 0,01 si ottiene ponendo un zero alla sua dritta per rendere il numero delle sue cifre decimali doppio del numero delle cifre decimali che si vogliono nella radice; indi si estrae la radice quadrata dal numero 68,9530 considerato come intero, la quale e 830; e da questo si separano due cifre decimali, e si avrà la radice cercata eguale ad 8,30, a meno di 0,01.

Sia inoltre da estrarsi la radice quadrata dal numero 0, 23579 a meno di 0,01. Siccome basta che il numero dato abbia un doppio numero di cifre decimali di quante se ne vogliono nella radice; si supprimono le due a dritta, e si estrarrà la radice dal numero 0, 7357, la quale si troverà essere 0, 48 : e questa è pure la radice del numero proposto a meno di 0,01.

Avvertimento. Il ragionamento del n.° 316 vale anche per fare la correzione all' ultima cifra nell' estrarre la radice quadrata da un numero decimale, badando che nel decimale l'unità rispetto a cui si fa il ragionamento è quella dell' infimo ordine decimale della radice.

319. Nel n.° 314 abbiamo detto come si estrae la radice quadrata da una frazione a meno di una parte dell' unità indicata dal suo denominatore, ma dopo le regole date (n.ri 318 e 319 possiamo) estrarre la radice quadrata da una frazione a meno di una parte dell' unità indicata da un numero qualunque *n*.

Sia p. e. da estrarsi la radice quadrata da $\frac{8}{13}$ a meno di $\frac{1}{60}$ dell' unità. Moltiplichiamo la frazione pel quadrato di 60, e ne risulta il numero frazionario $\frac{28800}{13}$; ora dovendosi estrarre la radice quadrata da questo prodotto frazionario a meno di una unità, l'estragghiamo dall'intero 2215 contenuto in esso, e questa si trova essere 47; infine dividiamo questa radice per 60, e si avrà che la radice di $\frac{8}{13}$ a meno di $\frac{1}{60}$ è compresa fra $\frac{47}{60}$ e $\frac{48}{60}$; perciò ciascuna di queste frazioni si può prendere per radice di $\frac{8}{13}$ approssimata a meno di $\frac{1}{60}$, ma la prima per difetto, e la seconda per eccesso.

320. Allorchè si deve estrarre la radice quadrata da una frazione ordinaria con l' approssimazione decimale, la regola è la seguente: *Da una frazione ordinaria si estrae la radice quadrata a meno di 0,1, di 0,01, di 0,001, ec., riducendola prima in decimale con un doppio numero di cifre decimali di quante se ne vogliono nella radice, e poi si estrae la radice quadrata dal numero decimale che ne risulta* (*).

Sia p. e. da estrarsi la radice quadrata da $\frac{7}{13}$ a meno di 0,01. Riduciamo la proposta frazione in 10000^{mi} e viene eguale a 0,5384; poi estragghiamo la radice quadrata da questo numero e si trova

(*) La teoria delle approssimazioni numeriche fa vedere che quando si vuole estrarre la radice quadrata da una frazione ordinaria, e si vuole espressa in decimali, non è necessario che la data frazione ordinaria si riduca in decimale con un numero di cifre decimali doppio di quante deve averne la radice; ma basta che abbia tante cifre decimali esatte, a contar dalla prima cifra significativa dopo la virgola, quante se ne vogliono nella radice, o una dippiù in certi casi; perchè le rimanenti cifre a dritta che ci vogliono per arrivare ad un doppio numero di cifre di quante ne deve avere la radice si possono supplire con zeri. Così volendo estrarre la radice quadrata da $\frac{11}{13}$ a meno di 0,001, si ridurrà la frazione in 1000^{mi} e non già in milionesi e viene eguale a 0, 846; e si fa così perchè volendosi tre cifre esatte nella radice basta che il suo quadrato abbia tre cifre esatte, e le rimanenti tre cifre che bisognerebbero nel quoziente per ottenere la radice in 1000 ^{mi} si supplisrono con zeri, senza protrarre la divisione del numeratore pel denominatore; perciò si estrarrà la radice quadrata da 846000 a meno di unità, che si troverà eguale a 919, e separandone tre cifre decimali, si avrà la radice della data frazione a meno di 0,001, eguale a 0,919. Ciò perchè la regola per conoscere le cifre esatte della radice quadrata è la seguente.

Le cifre esatte della radice quadrata di un numero decimale senza parte intera sono tante quante sono le cifre esatte del numero, a contar dalla prima significativa dopo la virgola, allorchè la prima coppia a sinistra che ha cifre significative ha una sola cifra significativa ed è quella a dritta, ovvero quando questa coppia esprime il numero 25 o maggiore di 25; e se ciò non avviene, le cifre esatte della radice sono una di meno di quante cifre esatte ha il quadrato. Se poi il dato numero decimale ha parte intera, il numero delle cifre esatte della radice quadrata è uguale a quello delle cifre esatte del numero dato, allorchè la parte intera del numero ha un numero impari di cifre, ovvero avendone un numero pari le due cifre a sinistra formano il numero 25 o maggiore di 25, altrimenti non si può contare che su tante cifre esatte della radice quante sono le cifre esatte del quadrato men una.

eguale a 0,73 erronea per meno di 0,01 ; perchè se si prende 0,74 il suo quadrato è maggiore di 0,5384, e quindi maggiore della frazione ordinaria proposta la quale è compresa fra 0,5384 e 0,5385.

321. Dalle cose precedenti si desume che la radice quadrata di un numero allorchè non può ottenersi esattamente, si può trovare con un' approssimazione minore di una parte dell' unità indicata da un numero intero qualunque, perchè si possono trovare due numeri fra i quali essa è compresa differenti fra loro per una quantità minore di qualunque data. Così p. e. volendo la radice di 5 con un errore minore di un milionesimo dell' unità, si spingerà l' estrazione della radice sino ai milionesimi, e si troverà essere compresa per 2,236067 e 2,236068, cioè fra due numeri che differiscono fra loro per un milionesimo, e quindi se uno di questi numeri si prende per radice quadrata di 5, l' errore che si commette è minore di un milionesimo, il primo per difetto ed il secondo per eccesso. Ma non bisogna credere che aumentando il numero delle cifre decimali della radice, la medesima possa infine ottenersi esattamente, nè tampoco bisogna credere che possa essere espressa da un numero frazionario che non sia decimale, essendo impossibile di poterla esprimere nell' uno o nell' altro modo, come or ora passiamo a vedere.

322 *Il quadrato di una frazione irriducibile è pure una frazione irriducibile.*

In effetti, la data frazione essendo irriducibile, i suoi termini sono primi fra loro, e quindi elevati a potenza le loro potenze sono anche numeri primi fra loro, altrimenti se avessero un fattor comune, questo fattore che divide le potenze di due numeri dovrebbe anche dividere questi numeri (n. 128), cioè dovrebbe dividere i due termini della frazione che si è supposta irriducibile, il che è assurdo.

Ciò che si è detto rispetto al quadrato vale rispetto ad una potenza qualunque.

323. *Un numero intero che non è quadrato di un numero intero, non può essere nè anche quadrato di un numero frazionario.*

Difatti, il numero frazionario che si vuole sia radice dell' intero possiamo supporlo irriducibile, perchè se non lo fosse, si potrebbe rendere tale riducendolo a minimi termini, ed allora il suo quadrato sarebbe anche irriducibile (n. 321); ma il suo quadrato deve eguagliare il proposto numero intero, dunque un numero intero sarebbe eguale ad un numero frazionario irriducibile, il che è assurdo.

Una frazione irriducibile, in cui almeno uno de' suoi termini non è quadrato perfetto, non può essere quadrato di un' altra frazione.

In effetti, la frazione che si vuole sia radice della proposta possiamo supporla irriducibile, ed allora il suo quadrato sarebbe anche irriducibile (n. 321); ma il quadrato deve pareggiare la frazione irriducibile proposta, dunque due frazioni irriducibili sarebbero eguali, il che è assurdo (n.° 146).

324. Si dice *commensurabile* o *razionale* un numero il cui valore si conosce esattamente, o si può esattamente trovare.

Un numero il cui valore non può esattamente conoscersi, si dice *incommensurabile o irrazionale*; perchè non vi è misura comune fra esso e l'unità, e quindi non può esprimersi la ragione che esso serba all' unità.

La radice quadrata di un numero intero non quadrato perfetto è incommensurabile, non potendosi trovare nè anche una parte picciolissima dell' unità che misuri esattamente la detta radice quadrata; difatti, se si potesse trovare questa parte dell' unità, supponiamo che essa sia la parte millesima, e che sia contenuta 13 volte esattamente nella radice quadrata; allora questa radice sarebbe eguale a $^{13}/_{1000}$, perciò sarebbe espressa da una frazione, il che è assurdo.

Lo stesso si dirà delle radici terze, quarte, quinte, ec. dei numeri che non sono potenze esatte.

Facciamo notare che quantunque il rapporto di un numero irrazionale ad un numero razionale non possa esattamente esprimersi, pure può avvenire che il rapporto fra due numeri irrazionali, sia espresso esattamente. In effetti, se moltiplichiamo un numero irrazionale per qualunque numero razionale, il rapporto del numero irrazionale al prodotto, il quale è pure un numero irrazionale, è commensurabile. Così p. e. $\sqrt{2}$ serba un rapporto commensurabile al prodotto $3\sqrt{2}$, ossia a $\sqrt{9\times2}$, ossia a $\sqrt{18}$; e si ha $\sqrt{2} : \sqrt{18} :: 1 : 3 = {}^1/_3$.

Composizione del cubo di un numero.

325. *Se un numero è diviso in due parti, il suo cubo è uguale al cubo della prima parte, più il triplo quadrato della prima moltiplicato per la seconda, più il triplo quadrato della seconda moltiplicato per la prima, più il cubo della seconda parte.*

Sia p. e. il numero 47 diviso nelle due parti 40 e 7.

Dico che si avrà $47^3 = 40^3 + 3\times40^2\times7 + 3\times7^2\times40 + 7^3$.

Difatti, per avere il cubo di $40+7$ dobbiamo moltiplicare $40+7$ due volte per se stesso. Moltiplichiamo prima $40+7$ per $40+7$, e si avrà per prodotto $40^2+40\times7+40\times7+7^2$; moltiplichiamo poi questo prodotto per $40+7$, e si otterrà

$$40^3+40^2\times7+40^2\times7+40\times7^2+40^2\times7+40\times7^2+40\times7^2+7^3;$$

ma poichè in questo prodotto è ripetuta tre volte la parte $40^2\times7$, e la parte 40×7^2, esso si riduce a quello enunciato.

Da qui si rileva che, se un numero contiene decine ed unità, il suo cubo si compone dal cubo delle decine, dal triplo quadrato delle decime moltiplicato per le unità, dal triplo quadrato delle unità moltiplicato per le decine, e dal cubo delle unità.

In virtù di questo teorema possiamo farc il cubo di un numero composto di decine ed unità, facendo il cubo delle decine, il triplo quadrato delle decine per le unità, il triplo quadrato delle unità per

le decine, ed il cubo delle unità, e poi sommando i quattro risultati. Così p. e. essendo 46 euguale a 40+6, dovendo fare il cubo di 46, faremo il cubo nel detto modo, anzi nel farlo si opererà come se la cifra 4 fosse senza lo zero a dritta; quindi si farà il cubo di 4 che è 64, e si scrive; poi si farà il prodotto del triplo quadrato di 4 per 6 che è 288, e si scrive sotto al cubo di 4 in modo che la cifra a destra esca di un posto in fuori, come si vede qui affianco; indi si farà il prodotto del triplo quadrato di 6 per quattro che è 432, e si scrive sotto al prodotto precedente in modo che la cifra a dritta esca di un posto in fuori; dopo si farà il cubo di 6 che è 216, e si scrive sotto al prodotto precedente in modo che la cifra a dritta esca di un posto in fuori; infine si sommeranno i quattro risultati e si avrà il cubo di 46 eguale a 97336. La ragione è chiara, perchè il cubo di 40 è uguale a quello di 4 seguito da tre zeri; il triplo quadrato di 40 per 6 è uguale al triplo prodotto del quadrato di 4 per 6 seguito da due zeri; di triplo quadrato di 6 per 40 è uguale al triplo quadrato di 6 per 4 seguito da un zero; ed il cubo di 6 non è seguito da zeri.

```
64
 288
  432
   216
―――――
97336
```

326. Analogamente a quel che dicemmo per i quadrati dei numeri, convien osservare che non tutt' i numeri sono cubi perfetti. Così p. e. 27 essendo il cubo di 3, e 64 il cubo di 4, fra 27 e 64 esistono 35 numeri interi non cubi perfetti. Ed a misura che due numeri interi consecutivi sono di più in più gradi, cresce la differenza fra i loro cubi sino a divenir grandissima, ed anche maggiore di qualunque numero dato. Ci convinceremo di questa verità dando un' occhiata ai cubi dei nove primi numeri, che abbiamo scritti qui appresso in corrispondenza delle loro radici,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Qui anche osserviamo avverarsi come per i quadrati che le differenze fra i cubi dei numeri interi consecutivi sono numeri dispari, i quali sebbene non sieno numeri dispari successivi, come avviene per i quadrati, pure si passa da una differenza ad un altra con una certa legge; perchè, considerando tre numeri consecutivi, alla differenza fra i cubi del numero minore e dell' intermedio bisogna aggiungere il sestuplo del numero intermedio per avere la differenza fra i cubi del numero maggiore e dell'intermedio. Così p. e. le differenze fra i cubi de' numeri 2, 3, 4 sono i nùmeri 19 e 37, e 19 differisce da 37 per 6 volte il numero intermedio 3.

Per provarlo indichiamo con a un qualunque numero intero, il consecutivo essendo $a+1$, il suo cubo sarà a^3+3a^2+3a+1 che differisce dal cubo di a per $3a^2+3a+1$, ossia per $3a\times(a+1)+1$: quindi la differenza tra i cubi di due numeri interi successivi è uguale al triplo prodotto di essi numeri accresciuto dell' unità. Questa differenza è dispari, perchè se a è pari, $3a$ sarà pure pari,

ed il prodotto di $3a$ per $a+1$ sarà anche pari, ed aggiungendovi l' unità, il numero che ne risulta sarà dispari. Se poi a è dispari, $a+1$ è pari, e moltiplicato per $3a$ darà un prodotto anche pari, a cui aggiunta l'unità, il risultato sarà dispari. Or poichè si è veduto che la differenza fra il cubo di a ed il cubo di $a+1$ è $3a\times(a+1)+1$, quella fra la differenza de' cubi di a ed $a+1$ e la differenza dei cubi di $a+1$ ed $a+2$ sarà $3\times(a+1)(a+2)+1-3a\times(a+1)-1$, ossia $3\times(a+1)(a+2-a)=3\times(a+1)\times2=6(a+1)$; cioè, la differenza tra le differenze de' cubi di tre numeri interi consecutivi è sestupla del numero intermedio.

Si può osservare che i cubi de' nove primi numeri terminano con le stesse cifre, e solo vi è un' inversione relativamente a' numeri 2 e 8, ed a' numeri 3 e 7 equidistanti dagli estremi; terminando con 8 il cubo di 2, e con 2 quello di 8, e lo stesso avviene per 3 e 7. Da ciò segue che la cifra a dritta di un numero che è cubo perfetto è la stessa che quella a dritta della sua radice, salvo se la detta cifra sia 2, 3, 7, 8, perchè allora quella a dritta della radice sarà rispettivamente 8, 7, 3, 2.

Estrazione della radice cubica da' numeri.

327. Primieramente il numero da cui vogliasi estrarre la radice cubica non abbia più di sei cifre, e sia il numero 91221.

Or poichè la radice cubica di 1000 ha due cifre, il numero proposto essendo maggiore di 1000 la radice cubica contiene decine ed unità; quindi nel proposto numero sarà contenuto il cubo delle decine della radice, più il triplo quadrato delle decine moltiplicato per le unità, più il triplo quadrato delle unità moltiplicato per le decine, più il cubo delle unità ; ma il cubo delle decine non ha cifre significative di ordine inferiore alle migliaia, perchè tiene tre zeri a dritta, dunque se distacchiamo tre cifre dalla dritta del numero proposto , nel numero 91 a sinistra sarà contenuto il cubo delle decine della radice, quindi estraendo la radice cubica dal massimo cubo contenuto in 91 , il quale è 64 , si avranno le decine della radice che sono 4 ; difatti , non possono essere più di 4, perchè se fossero 5, il cubo di 5 decine che è 125 migliaia non è contenuto nella migliaia del numero proposto che sono 91.

Scriviamo dunque a dritta del numero proposto le 4 decine della radice , intavolando l' operazione come qui appresso.

91,221	45	48	188	48	75
64	48	6	4	5	4
272,21		288		240	
271 25		432		300	
96		216		125	
		33336		27125	

Ora se togliamo da 91 il cubo delle 4 decine, ed accanto la resto 27 abbassiamo le tre cifre che avevamo distaccate, nel numero 27221 che ne risulta sarà contenuto il prodotto del triplo qua-

drato delle decine moltiplicato per le unità, più il triplo quadrato delle unità moltiplicato per le decine, più il cubo delle unità; ma il prodotto del triplo quadrato delle decine per le unità non ha cifre significative di ordine inferiore alle centinaia, perciò distaccando due cifre dalla dritta del numero 27221, nel numero 272 a sinistra sarà contenuto il prodotto del triplo quadrato delle decine per le unità; quindi se dividiamo 272 per 48 che è il triplo quadrato delle decine, il quoziente 6 che si ottiene sarà la cifra delle unità; ma per assicurarsi se questa cifra sia giusta o troppo grande, bisogna completare il cubo di 46 facendone le altre parti, che sono il prodotto del triplo quadrato delle decine per le unità, quello delle decine pel triplo quadrato delle unità, ed il cubo delle unità, e poi si osserverà se la loro somma risulta maggiore eguale o minore del numero 27221, e se risulta maggiore, bisogna diminuire la detta cifra successivamente di tante unità finchè divenga minore del detto numero.

La somma di queste tre parti che completa il cubo di 46 si può ottenere come si disse (n.° 325) facendo il prodotto del triplo quadrato di 4 per 6, ed il prodotto del triplo quadrato di 6 per 4, ed il cubo di 6, come si vede praticato nel prospetto del calcolo.

Ciò fatto, siccome si ottiene per risultato 33336 che è maggiore di 27225, ne deduciamo che la cifra 6 è troppo grande, perciò si prende 5, e fatto rispetto a 5 lo stesso calcolo che si è fatto rispetto a 4, si trova per risultato il numero 27125 che è minore di 27221, quindi 5 è la cifra delle unità. Ora togliendo 27125, da 27221, si finisce così di togliere dal numero proposto il cubo di 45, e poichè si ottiene per resto 96, ne conchiuderemo che il numero proposto non è cubo perfetto, e quindi 45 è la radice del maggior cubo contenuto in 91221, e questo numero supera di 96 il cubo di 45.

327. Se poi dovesse estrarsi la radice cubica da un numero che ha più di sei cifre, ma non ne ha più di nove, come è p. e. il numero 189119224, si ragionerebbe similmente, cioè si dirà:

Il numero proposto essendo maggiore di 1000, la sua radice cubica conterrà decine ed unità, perciò distaccando tre cifre della dritta del numero proposto, nel numero 189119 a sinistra sarà contenuto il cubo delle decine della radice; adunque per trovar queste decine bisogna estrarre la radice cubica del numero 189119, ma questo numero avendo sei cifre sappiamo estrarne la radice cubica, il che effettuandosi, come si vede qui appresso, troveremo che essa è 57.

189,119,224	574	75	192	57	147	57	9747	48
125	75	8	5	7	5	57	4	57
641,19		600		525		399	38988	336
601 93		960		735		285[illegible]	2736	240
39262,24		512		343		3249	64	2736
		70112		60193		3	3926224	
						9747		

Ora togliendo il cubo di 57 dal 189119, ed ottenendosi per re-

sto 3926, se abbassiamo a dritta di questo resto le tre cifre che eransi distaccate, nel numero 3926224 che ne risulta sarà contenuto il prodotto del triplo quadrato delle decine per la cifra delle unità, più il triplo quadrato delle unità moltiplicato per le decine, più il cubo delle unità; ma il primo prodotto è contenuto nelle centinaia, perciò separando due cifre dalla dritta del numero 3926224, nel numero 39262 a sinistra sarà contenuto il prodotto del triplo quadrato delle decine per la cifra delle unità; adunque se dividiamo il numero 39262 per 9747 che è il triplo quadrato delle 57 decine, il quoziente 4 che si ottiene sarà la cifra delle unità, la quale bisognerà verificare se sia giusta completando il cubo di 574 facendone le altre tre parti, e vedendo se la loro somma risulti maggiore eguale o minore di 3926224, e poichè risulta eguale a questo numero, ne conchiuderemo che il numero 574 è la radice cubica esatta del numero 189119224.

Similmente si ragionerebbe per estrarre la radice cubica da un numero chè abbia più di nove cifre, ed è facile scorgere che il numero proposto si dividerà in gruppi di cifre a tre a tre cominciando da dritta, e perciò il primo gruppo a sinistra può venire di due o di una sola cifra. Inoltre si vede che, analogamente a quel che fu detto per la radice quadrata, se nel corso dell' operazione avvenisse che dopo aver abbassato affianco ad un resto il gruppo seguente, e dopo aver separate due cifre dalla dritta dal numero che n' emerge, il numero a sinistra fosse minore di quello per cui deve dividersi, cioè del triplo quadrato della radice incompleta trovata, allora la seguente cifra della radice sarà zero, perciò bisognerà porre prima un zero a dritta della detta radice, e poi si abbasserà l' altro gruppo che viene appresso, e si proseguirà l'operazione.

Dalle cose precedenti desume la seguente regola per estrarre la radice cuba da un intero a meno di *un' unità.*

Regola. *Per estrarre la radice cubica da un numero intero, si separano a tre a tre le sue cifre cominciando dalla dritta, perciò il primo gruppo a sinistra potrà avere due cifre ed anche una sola. Poi si estrarrà la radice cubica dal maggior cubo contenuto nel primo gruppo a sinistra, e questa radice sarà la cifra a sinistra della radice cercata. Indi il cubo di questa cifra si toglierà dal numero rappresentato dal primo gruppo a sinistra, ed a dritta del resto si abbasserà il gruppo seguente, e dalla dritta del numero che n'emerge si separeranno due cifre, ed il numero a sinistra si dividerà pel triplo quadrato della radice trovata; la cifra che si avrà per quoziente sarà la seconda cifra della radice cercata, purchè facendosi le altre parti del cubo della radice trovata la loro somma possa togliersi dal numero che si è ottenuto con abbassare il gruppo affianco al resto; altrimenti la predetta cifra si diminuirà di tante unità finchè la sottrazione possa eseguirsi. Fatta la sottrazione, si abbasserà a dritta del resto l'altro gruppo che segue, e dalla dritta del numero che ne nasce si separeranno due cifre, ed il numero a sinistra si dividerà pel triplo quadrato della radice trovata, e si proseguirà l' operazione con lo stesso metodo, finchè siansi abbassati tutti i gruppi del numero proposto. Se poi abbassando un gruppo, il numero che deve dividersi pel triplo quadrato della radice trovata risulta minore di questo triplo, la seguente cifra della radice sarà zero; perciò si porrà la cifra zero in*

suo luogo, e si abbasserà l'altro gruppo che viene appresso, e si proseguirà l'operazione come abbiam detto di sopra.

Estrazione della radice cubica dalle frazioni.

328. *La radice cubica di una frazione è una nuova frazione che ha per numeratore la radice cuba del numeratore, e per denominatore la radice cuba del denominatore; perchè questa frazione moltiplicata due volte per sè stessa produce la proposta.*

Allorchè i termini della frazione non sono cubi perfetti, per avere la radice cubica della frazione a meno di una parte dell'unità indicata dal lato denominatore, si rende il denominatore cubo perfetto moltiplicando i termini della frazione pel quadrato del denominatore; e poi si estrae la radice cuba dal solo numeratore, perchè quella del denominatore è lo stesso denominatore primitivo; e se la radice del numeratore si trova a meno di un' unità, quella della frazione sarà approssimata a meno di una parte dall' unità indicata dal suo denominatore.

Sia p. e. la frazione $^2/_7$ da cui voglia estrarsi la radice cubica. Moltiplichiamo i termini pel quadrato del denominatore, che è 49, e si riduce ad estrarre la radice cubica da $^{98}/_{343}$; e siccome la radice cubica del numeratore a meno di un' unità è 4, quella della frazione è $^4/_7$, approssimata a meno di $^1/_7$, perchè è compresa fra $^4/_7$ e $^5/_7$.

329. *La radice cubica di un numero frazionario a meno di una unità, si ottiene estraendola a meno di un' unità dall' intero contenuto in esso.*

La dimostrazione è come quella fatta per la radice quadrata.

330. La radice cubica di un numero a meno di una parte *ennesima* dell'unità si ottiene moltiplicando il numero pel cubo di n; e poi si estrae la radice cubica a meno di un'unità dal prodotto, ed infine questa si divide per n; il quoto esprime la radice cubica a meno di una parte *ennesima* dell' unità.

Il ragionamento è analogo a quello fatto per la radice quadrata.

Estrazione della radice cubica dai numeri per approssimazione.

331. *Per estrarre la radice cubica da un intero a meno di* 0,1, *di* 0,01, *ec., si aggiunge a dritta dell' intero un numero di zeri triplo di quante sono le cifre decimali che si vogliono nella radice, e dal numero che ne risulta si estrae la radice cubica a meno di un'unità, ed infine da questa si separano le cifre decimali richieste.*

Sia p. e. da estrarsi la radice cubica da 9 a meno di 0,001. Siccome la radice deve esprimere 1000^{mi} il suo cubo deve rappresentare bilionesimi; perchè deve avere un numero di cifre decimali triplo di quante ne ha la radice; perciò aggiungiamo tre terni di zeri a dritta di 9 per ridurlo in bilionesimi, e dal numero 9000000000 che ne risulta estragghiamo la radice a meno di un' unità, che si trova eguale a 2080. Infine da questa si separano tre cifre decimali, e si avrà la radice cubica di 2 eguale a 2,080 a meno di 0,001, perchè se essa si aumenta di 0,001, il suo cubo risulta maggiore di 9000000000 bilionesimi.

da sinistra verso dritta. Così, la progressione $\div$ 1. 7. 10. 13. è crescente, e l'altra $\div$ 10. 8. 6. 4. 2 è decrescente.

Per maggior generalità rappresenteremo con lettere i numeri che formano la progressione, indicando rispettivamente con a, b, c, d, e, ec. il primo, il secondo, il terzo, il quarto termine, ec. e con l l'ultimo termine.

In tal guisa una progressione sarà generalmente rappresentata da $\div$ $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ \ldots\ l.$

332. *Nella progressione aritmetica un termine qualunque è uguale al primo, più o meno la ragione presa tante volte quant' è il numero de' termini precedenti, secondo che la progressione è crescente o decrescente.*

Sia la progressione aritmetica $\div$ $a.\ b.\ c.\ d.\ e.\ \ldots$

Indicando con r la ragione, e supponendo che la progressione sia crescente, ciascun termine sarà eguale a quello che lo precede più la ragione; quindi si avrà

$$b=a+r,\ c=b+r,\ d=c+r,\ e=d+r,\ \text{ec.}$$

Ma per essere $b=a+r$, viene $c=a+r+r=a+2r$; e per essere $c=a+2r$, viene $d=a+2r+r=a+3r$; e per essere $d=a+3r$, viene $e=a+3r+r=a+4r$.

Quindi si scorge che nella progressione aritmetica crescente, un termine qualunque è uguale al primo più la ragione presa tante volte quant'è il numero de' termini precedenti.

Se la progressione fosse decrescente, ciascun termine è uguale al precedente diminuito della ragione; perciò si avrà $b=a-r$, $c=b-r$, $d=c-r$, $e=d-r$, ec.

Quindi viene $c=a-r-r=a-2r$, e $d=a-2r-r=a-3r$, ed $e=a-3r-r=a-4r$.

Da qui si vede che nella progressione aritmetica decrescente ciascun termine è uguale al primo diminuito della ragione presa tante volte quant' è il numero de' termini precedenti.

Ciò premesso, se l è un termine del posto n, il teorema enunciato può scriversi in una delle due seguenti maniere

$$l=a+(n-1)r,\ \text{ed}\ l=a-(n-1)r,$$

secondo che la progressione è crescente o decrescente.

Applicando questo teorema a trovare il termine 15mo della progressione che ha per primo termine 1, e la ragione è 3; si avrà $l=1+(15-1)3=1+14\times3=43$.

333. Dal medesimo teorema si rileva il modo come inserire quanti medii aritmetici si vogliano fra due numeri dati.

Difatti, indicando con a ed l questi numeri, e con m il numero de'medii da inserirsi, si può riguardare l come l'ultimo termine della progressione il cui primo termine è a, ed il numero de' termini è $m+2$, perciò quando la progressione è crescente si ha $l=a+(m+1)r$; e togliendo a da' due membri, si avrà $l-a=(m+1)r$; e dividendo i due membri per $m+1$, verrà $r=\frac{l-a}{m+1}$.

Quando poi è decrescente, si avrà $l=a-(m+1)r$; ed aggiungendo $(m+1)r$ al primo ed al secondo membro, e togliendone l, si avrà $(m+1)r=a-l$; e dividendo i due membri per $m+1$, verrà $r=\frac{a-l}{m+1}$;

Adunque, o che la progressione sia crescente o decrescente, la ragione è sempre uguale alla differenza fra i due numeri dati divisa pel numero de' medii da inserirsi aumentato dell' unità.

Ciò premesso, volendo p. e. inserire 5 medii aritmetici fra i numeri 7 e 25, si avrà $r=\frac{25-7}{5+1}=\frac{18}{6}=8$: quindi i cinque medii da inserirsi fra 7 e 25 sono 10, 13, 16, 19 12; perciò si avrà la progressione ÷ 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25.

334. *Se fra tutti i termini di una progressione aritmetica s'inserisce lo stesso numero di medii aritmetici, i termini della data progressione insieme con i medii inseriti formeranno una nuova progressione aritmetica.*

Difatti, la ragione è costante, perchè è uguale alla differenza di due termini consecutivi, che è costante, divisa pel numero de' medii da inserirsi aumentato dell'unità, il quale pure è costante.

335. *Nella progressione per differenza la somma di due termini equidistanti dagli estremi pareggia quella de' termini estremi.*

Sia la progressione ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13.

Considerando i termini estremi ed i loro prossimi, essi formano una proporzione aritmetica, perchè la differenza fra il primo ed il secondo è uguale a quella fra il penultimo e l'ultimo; perciò la somma del primo ed ultimo è uguale a quella del secondo e penultimo, cioè $1+13=3+11$. Ora non considerando gli estremi, resta la progressione che comincia dal secondo termine 3 e finisce al penultimo 11; adunque per la stessa ra-

gione sarà $3+11=5+9$; ma si è dimostrato essere $1+13=3+11$, dunque sarà pure $1+13=5+9$. Similmente procedendo si troverà sempre che la somma de' termini estremi pareggia quella de' termini equidistanti dagli estremi.

Se il numero de' termini della progressione è dispari, si avrà la somma de' termini estremi eguale al doppio del termine medio della progressione.

336. *La somma dei termini di una progressione aritmetica è eguale alla semisomma de' termini estremi moltiplicata per il numero dei termini.*

Sia la pressione $\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, . \,.\, h \,.\, k \,.\, l$.

Indichiamo con r la ragione, con n il numero dei suoi termini, e con S la loro somma, si avrà

$$S=a+b+c+\ldots+h+k+l,$$

$$S=l+k+h+\ldots+c+b+a;$$

Sommando queste due eguaglianze membro a membro, si vede che i termini i quali sono l'uno sotto l'altro sono equidistanti dagli estremi; quindi la loro somma pareggia la somma $a+l$ dei termini estremi, la quale sarà ripetuta n volte; perciò si avrà $2S=(a+l)\times n$, e dividendo per 2 verrà $S=\frac{(a+l)\times n}{2}$.

Nella progressione $\div 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, . \,.\, n$, che è formata dalla serie dei numeri naturali a contar dall'unità sino al numero n, essendo $l=n$, verrà $S=\frac{(n+1)n}{2}$.

Nella progressione $1.\ 2.\ 3.\ 5.\ .\ n$ formata dai numeri dispari, siccome l'ultimo termine n è uguale ad $1+(n-1)\times 2=2n-1$, e quindi $(a+l)\times n=(1+2n-1)\times n=2n^2$, si avrà

$$S=\frac{2n^2}{2}=n^2;$$

cioè la somma di n numeri dispari a contar dell'unità è uguale al quadrato di n. Così p. e. la somma $1+3+5=3^2=9$; e la somma $1+3+5+7=4^2=16$.

PROGRESSIONE GEOMETRICA.

337. Si chiama *progressione geometrica*, ovvero *progressione per quoziente*, una serie di numeri tali che il quoziente il quale nasce dal dividere ciascuno di essi per quello che lo precede è costante.

Tali sono i numeri 1, 2, 4, 8, 16, 32, ec. dove il quoziente di ciascuno diviso per quello che lo procede è sempre 2. Questo quoziente costante si chiama *ragione* della progressione, ed i numeri che costituiscono la serie diconsi *termini* della progressione.

Per indicare che i detti numeri sono in progressione geometrica, si scrivono nel seguente modo

$$\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32,$$

e si leggono: *1 sta a 2 come 2 sta a 4 come 4 sta ad 8, ec.*

La progressione si dice *crescente* o *decrescente* secondo che i suoi termini crescono in valore, o diminuiscono, andando da sinistra verso dritta. Così la progrossione $\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32$ è crescente, e l' altra $\div 162 : 54 : 18 : 6 : 3 : 1$ è decrescente.

338. *Nella progressione geometrica un termine qualunque è uguale al primo moltiplicato per la ragione elevata alla potenza indicata dal numero de' termini precedenti.*

Sia la progressione $\div a : b : c : d : e \ldots l.$

Indicando con q la ragione, si avrà

$$\frac{b}{a}=q,\ \frac{c}{b}=q,\ \frac{d}{c}=q,\ \frac{e}{d}=q,\ \text{ec.}$$

donde si ricava (n.° 96) $b=aq$, $c=bq$, $d=cq$, $e=dq$, ec; ma per essere $b=aq$, viene $c=aq\times q=aq^2$; e quindi $d=aq^2\times q=aq^3$, ed $e=aq^3\times q=aq^4$.

Da qui si vede che nella progressione geometrica un termine qualunque è uguale al primo moltiplicato per la ragione elevata alla potenza indicata dal numero de' termini precedenti.

Ciò posto, se indichiamo con l un termine del posto n, il teorema dimostrato può scriversi nel seguente modo

$$l=aq^{n-1}$$

Applicando questo teorema a trovare il settimo termine della progressione il cui primo termine è 3, e la ragione è 2; si avrà $l=3\times 2^6=3\times 64=192$.

339. Lo stesso teorema conduce al modo come inserire più medii geometrici, o *medii proporzionali* fra due numeri dati. Difatti indicando con a ed l questi due numeri, e con m il numero de' medii da inserirsi, l sarebbe il termine del posto $m+2$ della progressione che ha per primo termine a; perciò si avrà l' eguaglianza $l=aq^{m+1}$ e dividendo primo e secondo

membro per a, si trova $\frac{l}{a}=q^{m+1}$; ed estraendo la radice del grado $m+1$ viene $q=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}}$.

Dunque per ottenere la ragione deve estrarsi la radice del grado $m+1$ dal quoziente che si ottiene dividendo il numero l per a; operazione che sappiamo fare sino a che $m=1$, o a 2, cioè, fino a che i medii geometrici da inserirsi sono uno o due.

Volendo inserire due medii proporzionali fra i due numeri 9 e 1125, la ragione sarà eguale a $\sqrt[3]{\frac{1125}{9}}=\sqrt[3]{125}=5$; e quindi i due medii da inserirsi fra 9 e 1125 sono 45 e 225; perciò i quattro numeri 9, 45, 225, 1125 sono in progressione geometrica.

340. *Se fra tutti i termini di una progressione geometrica si inserisce lo stesso numero di medii proporzionali, i termini della data progressione insieme con i medii inseriti formano una nuova progressione geometrica.*

Difatti, la ragione è costante perchè è uguale alla radice del grado indicato dal numero de'medii da inserirsi aumentato dell'unità, la quale deve estrarsi dal quoziente costante che si ottiene dividendo un termine della progressione per il precedente.

341. *In ogni progressione geometrica il prodotto dei termini equidistanti dagli estremi pareggia quello dei termini estremi.*

Sia la progressione ∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384.

Considerando i termini estremi ed i loro prossimi, essi formano una proporzione geometrica, perchè il secondo diviso pel primo è uguale all' ultimo diviso pel penultimo; e perciò il prodotto del primo per l' ultimo è uguale al prodotto del secondo pel penultimo, cioè $3\times384=6\times192$. Ora non considerando il primo e l'ultimo termine, resta la progressione che comincia dal secondo 6 e finisce al penultimo 192; adunque per la stessa ragione sarà $6\times192=12\times96$; ma si è dimostrato essere $3\times384=6\times192$, dunque sarà pure $3\times384=12\times96$. Similmente procedendo, si vede che il prodotto dei termini estremi pareggia quello de'termini equidistanti dagli estremi.

Se il numero de' termini della progressione fosse dispari, il prodotto dei termini estremi è uguale al quadrato del termine medio.

342. *La somma dei termini di una progressione geometrica è uguale alla differenza fra il primo termine ed il prodotto della ragione per l'ultimo termine, divisa per la differenza fra l' unità e la ragione.*

Indichiamo con n il numero dei termini, con q la ragione, e con S la somma dei termini, si avrà

$$S=a+b+c\ldots+h+k+l;$$

e moltiplicando per a si avrà

$$Sa=aq+bq+eq+\ldots+hq+kq+lq,$$

ma siccome ciascun termine moltiplicato per la ragione è uguale al termine seguente, si potrà scrivere

$$Sq=b+c+d+\ldots+h+k+l+lq;$$

e togliendo da questa eguaglianza la prima che abbiamo scritta verrà $Sq-S=lq-a$, ovvero $S(q-1)=lq-a$, e dividendo i due membri per $q-1$, si avrà $S=\frac{lq-a}{q-1}$.

Se la progressione fosse decrescente, si toglierebbe la seconda eguaglianza dalla prima, e verrà $S=\frac{a-lq}{1-q}$; quindi si ricade nella stessa regola.

343. *La somma dei termini di una progressione geometrica crescente diviene infinita quando il numero dei termini è infinito.*

In effetti, la somma di una serie illimitata di numeri sempre crescenti, a lungo andare diverrà maggiore di qualunque grandezza data, allorchè il primo termine della serie è un numero dato che si può supporre anche picciolissimo rispetto all' unità; perchè se anche tutti i numeri della serie fossero eguali al più picciolo a, la loro somma sarebbe $a\times n$, ed è chiaro che si può supporre n così grande da essere $a\times n$ maggiore di qualunque numero dato; quindi con più ragione ciò sarà vero se i termini della serie invece di essere tutti uguali ad a, andassero sempre crescendo.

344. *La somma dei termini di una progressione geometrica decrescente, a misura che aumenta il numero dei termini, si avvicina ad un limite, che è il primo termine diviso per la differenza fra l' unità e la ragione.*

Abbiamo veduto che la somma de' termini è uguale ad $\frac{a-lq}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{lq}{1-q}$; quindi si scorge che essa è sempre mi-

nore di $\frac{a}{l-q}$, ma cresce incessantemente accostandosi a questa quantità, perchè la parte $\frac{lq}{1-q}$, la quale se ne toglie, diviene sempre più picciola a misura che aumenta il numero de'termini, e quando n è maggiore di qualunque numero dato, la detta parte diviene minore di qualunque grandezza data. In effetti, il termine l di posto n, allorchè n è sufficientemente grande diviene minore di qualunque grandezza assegnabile h, per picciolissima che questa sia, perchè se potesse mantenersi maggiore di h, siccome i termini precedenti sono più grandi si avrebbe una serie illimitata di numeri, il più picciolo dei quali è maggiore di h, quindi la somma sarebbe (n.° 343) maggiore di qualunque grandezza data e quindi maggiore di $\frac{a}{1-q}$, il che è impossibile. Se dunque il termine l a lungo andare diviene minore di qualunque grandezza data, anche il prodotto $\frac{lq}{1-q}$ diverrà minore di qualunque grandezza data; perciò $\frac{a}{1-q}$ sarà il limite della somma dei termini della progressione geomotrica decrescente.

Nella progressione $\dot{:}\dot{:}\ 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} \ldots$ dove $a = 1$, e $q = \frac{1}{2}$, la somma degli infiniti suoi termini è 2; e se il primo termine fosse $\frac{1}{2}$ la somma de' termini sarebbe eguale ad 1.

TEORIA DE' LOGARITMI.

345. Avendosi una serie di numeri in progressione aritmetica corrispondenti termine a termine ad un' altra serie di numeri in progressione geometrica, con la condizione che al termine zero della prima corrisponda il termine 1 della seconda, i numeri della prima serie diconsi *logaritmi* (*) de' corrispondenti numeri della seconda serie.

(*) Da λογος (logos) *ragione* αριθμος (aritmos) *numero*, cioè *ragione fra numeri*.

Così avendosi le due progressioni

$$\div\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ \ldots$$

$$\because\ 1:10:100:1000:10000:100000\ \ldots$$

la prima per differenza e la seconda per quoziente, in cui il termine *zero* della prima corrisponde al termine 1 della seconda; i numeri 1, 2, 3, ec. diconsi logaritmi de' numeri corrispondenti 10, 100, 1000, ec., e *zero* sarà sempre il logaritmo dell' unità.

La condizione che il termine *zero* della prima corrisponda al termine 1 della seconda è necessaria, perchè da essa dipendono i teoremi fondamentali relativi a' logaritmi.

346. Per la definizione data sembra che le frazioni non possano aver logaritmi; perchè quantunque la progressione geometrica potesse prolungarsi al di sotto dell'unità, ottenendosi per termini frazioni sempre decrescenti, la progressione aritmetica non può prolungarsi al di sotto dello zero, non esistendo quantità minori di zero.

Non pertanto se nella progressione aritmetica si lascia accennata la sottrazione che si fa della ragione da ciascun termine per avere il termine precedente, troveremo che essa può prolungarsi dall' altra parte dello zero. In effetti, nella progressione $\div\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots$ ciascun termine ottenendosi col togliere l' unità da quello che gli sta a dritta, il primo termine a sinistra dello zero sarà $0-1=-1$, il secondo sarà $0-1-1=-2$, perchè togliere l' unità 2 volte significa togliere 2 unità; il terzo sarà $-2-1=-3$, e così di seguito. Perciò le due progressioni aritmetica e geometrica, prolungate indefinitamente nel senso *ascendente* e nel senso *discendente*, saranno le seguenti

$$\div\ \ldots -4\ .\ -3\ .\ -2\ .\ -1\ .\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ \ldots$$

$$\because\ \ldots \frac{1}{10000}:\frac{1}{1000}:\frac{1}{100}:\frac{1}{10}:1:10:100:1000:10000\ldots$$

I termini della progressione per differenza preceduti dal segno $-$ diconsi *negativi*, e quelli a dritta diconsi *positivi*.

Questi termini o numeri negativi hanno origine da una sottrazione che non si è potuta eseguire, ed in sostanza altro non dinotano che una sottrazione da farsi della quantità che sta a dritta del segno $-$. Or poichè i logaritmi divengono negativi solo quando i numeri corrispondenti sono minori dell' unità, ne segue che solamente *le frazioni vere hanno per logaritmi numeri negativi.*

Il logaritmo di una frazione divenendo sempre più grande in valore assoluto a misura che la frazione si accosta a zero, egli è perciò che si dice: *il logaritmo di zero è eguale all' infinito negativo*.

347. Rispetto alla progressione per differenza con termini negativi valgono tutti teoremi dimostrati dal n.° 332 al n.° 336. Per persuadercene bisogna far vedere come si addizionano e si sottraggono le quantità negative.

In primo luogo allorchè un numero negativo, p. e. —3, si aggiunge ad un altro positivo, p. e. 4, la loro somma sarà 4—3=1; e quindi in sostanza non si fa che una sottrazione; difatti, la quantità—3 dinotando una quantità da togliersi, ne segue che dovendosi unire all' altra 4 per formare un sol tutto, non accresce il valore dell' altra parte 4, ma lo diminuisce di 3, così che il tutto sarà 4—3=1. Ciò può dimostrarsi col principio che il tutto deve essere tale che toltane la parte 4 deve rimanere l'altra —3; dunque 4 deve superare il tutto di 3 unità; perciò il tutto si ottiene togliendo 3 da 4, cioè togliendo da 4 la quantità preceduta dal segno —. Adunque in generale allorchè deve addizionarsi una quantità negativa con un' altra positiva, il risultato si ottiene togliendo della positiva quella preceduta dal segno—. Il risultato poi sarà positivo se la quantità positiva è più grande di quella preceduta dal segno—, come nell' esempio precedente; altrimenti sarà negativo come avviene se p. e. dovesse addizionarsi 4 e —7, dove il risultato sarà 4—7=—3; perchè da 4 dovendosi togliere 7, non si può togliere tutt' al più che 4, e resta a togliersi 3 che è l'eccesso di 7 su 4, il che viene espresso dal segno — posto avanti a 3, e perciò il risultato sarà —3.

Se poi dovessero addizionarsi due quantità negative, come —3 e —5, la somma sarà—3—5=—8; perchè addizionare tali quantità vuol dire che deve togliersi 3 ed insieme con 3 deve togliersi 5; perciò deve togliersi la loro somma 8, e quindi il risultato sarà —3—5=—8.

In secondo luogo, se da una grandezza a si toglie una altra negativa $-b$, il risultato sarà $a+b$, cioè si ottiene aggiungendo ad a la quantità negativa $-b$ col segno cambiato. Difatti, la grandezza a deve riguardarsi come un tutto da cui si toglie la parte $-b$, perciò l' altra parte che resta deve esser tale che unita a $-b$ deve dare il tutto a. Ora è manifesto che

solamente quando a $-b$ si aggiunge $a+b$ si ottiene per somma a; perchè il risultato essendo $a+b-b$, esso si riduce ad a per essere $b-b=0$. Dunque dovendosi togliere da a la quantità negativa $-b$, il resto si ottiene aggiungendo ad a la detta quantità col segno cambiato.

348. Dopo ciò è facile persuadersi come nella progressione aritmetica con termini negativi la differenza fra un termine negativo ed il suo precedente è uguale alla differenza costante fra un termine, positivo e quello che lo precede. Così, p. e., nella progressione

$$\div \ldots -4 . -3 . -2 -1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 \ldots ;$$

si avrà $-3-(-4)=-3+4=1$.

349. Teorema 1. *Il logaritmo del prodotto è uguale alla somma de' logaritmi de' fattori.*

Indichiamo con h è k due termini qualsivogliano della progressione geometrica ambedue nella parte ascendente, e con l un termine non intermedio ad essi e distante da k quanto h da 1. Indichiamo poi con x, y, z i rispettivi logaritmi di h, k, l; sarà pure z tanto distante da y quanto x da *zero*; perciò si avrà $h \times k = l \times 1 = l$, ed $x+y=z+o=z$. Ora l essendo il prodotto de' fattori h e k, ed il suo logaritmo z essendo eguale alla somma $x+y$ de' logaritmi de' fattori, ne segue che il logaritmo del prodotto è uguale alla somma de' logaritmi de' fattori.

La dimostrazione è la stessa nel caso in cui i numeri h e k si trovano ambedue nella parte discendente.

Se i due termini fossero uno nella parte discendente e l' altro nella parte ascendente, indicandoli con h e k, sia h più distante da 1 che k, e si denoti con g un termine intermedio nella parte ove trovasi il più distante da 1, cioè nella parte discendente; e sia g distante da h quanto k da 1. Sieno poi $-x$, $-z$, y i logaritmi di h, g, k; sarà $-z$ tanto distante da $-x$ quanto y da *zero*. Adunque si avrà $h \times k = g \times 1 = g$, e $-x+y=-z+0=-z$. Ora essendo g il prodotto de' fattori h e k, ed il suo logaritmo $-z$ essendo eguale alla somma $-x+y$ dei logaritmi de' fattori; ne segue che il logaritmo del prodotto pareggia la somma de' logaritmi dei fattori.

Se i fattori fossero tre, per esempio, a, b, c; considerando il prodotto abc come formato da due fattori $ab \times c$, si avrà $\log.ab \times c = \log.ab + \log.c$; ma $\log.ab = \log.a + \log.b$; quindi $\log.abc = \log.a + \log.b + \log c$. Similmente si procederebbe se i fattori fossero più di tre.

350. TEOREMA II. *Il logaritmo del quoziente è uguale al logaritmo del dividendo diminuito di quello del divisore.*

Indichiamo con a il dividendo, con b il divisore, e con q il quoziente, si avrà $a = bq$; e quindi $\log.a = \log.b + \log.q$; e togliendo $\log.b$ dal primo e dal secondo membro, si avrà $\log.a - \log.b = \log.q$. Ciò bisognava dimostrare.

309. TEOREMA III. *Il logaritmo della potenza di un numero è uguale al logaritmo del numero moltiplicato per l' esponente della potenza.*

Sia a il numero e 3 il grado della potenza ; sarà $a^3 = aaa$; perciò $\log.a^3 = \log.a + \log.a + \log.a = 3 \times \log.a$. Similmente si vede che se il grado della potenza fosse 4 ; sarebbe $\log.a^4 = 4 \times \log.a$; ed in generale indicando l' esponente con n sarà $\log.a^n = n \times \log.a$.

351. TEOREMA IV. *Il logaritmo della radice di un numero è uguale al logaritmo del numero diviso per l'indice della radice.*

Indichiamo con a il numero, e con x la sua radice del grado n ; si avrà $x^n = a$; e prendendo i logaritmi, si avrà $n \times \log.x = \log.a$; e dividendo il primo ed il secondo membro per n, si avrà $\log.x = \frac{\log.a}{n}$. Ciò bisognava dimostrare.

352. Egli è chiaro che se si avesse una tavola in cui fossero registrati i logaritmi di tutti i numeri, mercè di essa si potrebbero eseguire con grande semplicità le operazioni di calcolo. In effetti, per ottenere, p. e., il prodotto di due numeri basterebbe sommare i logaritmi de' fattori, perchè la somma essendo il logaritmo del prodotto, si cercherebbe nella tavola a qual numero essa corrisponde, e questo numero sarebbe il prodotto cercato. Parimenti si vede che in virtù de' teoremi dimostrati nel n.° 350 e seguenti, si otterrebbe il quoziente facendo una sottrazione, e si otterrebbe la potenza di un numero eseguendo una moltiplicazione, e la radice mediante una divisione.

Quindi si scorge di quanta utilità sia formare una tavola in cui si trovassero scritte due serie di numeri una delle quali contenesse tutti i numeri, e l' altra i loro logaritmi; ma sebbene non sia possibile formare questa tavola, pure vedremo che basterà formarne una la quale contenga i logaritmi dei soli numeri interi sino a 10000 ; e solamente ne' calcoli ove

si richiede una grande approssimazione conviene che la tavola si estenda sino a 100000. Questa tavola si chiama *tavola de' logaritmi de' numeri* o *canone logaritmico*.

Si vede inoltre che non è necessario di trovare se non che i logaritmi de' soli numeri primi, perchè i numeri non primi essendo prodotti di fattori primi, i loro logaritmi si ottengono in virtù del teorema che il logaritmo del prodotto pareggia la somma de' logaritmi dei fattori.

La gloria dell' invenzione de' logaritmi e della costruzione della prima tavola è dovuta allo scozzese Nepero, che la pubblicò nel principio del settimo secolo (*).

353. Per formare una tavola di logaritmi dovendosi stabilire due progressioni una aritmetica e l' altra geometrica tali che al termine *zero* della prima corrisponda il termine 1 della seconda, per progressione aritmetica sceglieremo la serie de' numeri naturali; perciò essa sarà

$$\div \ldots -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots$$

La progressione geometrica poi sappiamo che deve avere l' unità come termine corrispondente allo *zero* dell' aritmetica; ma quello a dritta dell' unità può essere interamente arbitrario; non pertanto stabilito che avremo il secondo termine resterà determinata la ragione, e quindi resteranno anche determinati tutti gli altri termini della progressione geometrica. In tal modo si avrà un sistema di due progressioni che dicesi *sistema di logaritmi*.

Or, siccome, dopo fissata la progressione aritmetica, la determinazione di un sistema di logaritmi dipende dal termine della progressione geometrica che ha per logaritmo l' unità, questo termine si chiama *base del sistema*. Il più comodo sistema di logaritmi è quello che ha per base 10, cioè la base del sistema di numerazione, ed i logaritmi relativi a questo sistema essendo quelli di cui si fa uso, diconsi *logaritmi ordinarii* o *volgari* ed anche *briggiani* (**).

(*) Nepero pubblicò i logaritmi nel sistema che aveva per base il numero immensurabile 2,7182818...; perciò furono detti *logaritmi neperiani*, ed anche *naturali* o *iperbolici*, per una ragione che qui non possiamo addurre.

(**) Da Briggio professore di Oxford, che per consiglio di Nepero costruì la prima tavola del sistema che ha per base 10.

Dunque le due progressioni del sistema dei logaritmi ordinari sono

$$\div \dots 0 \, . \, 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \dots$$
$$\because \dots 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \dots$$

354. Essendosi detto più sopra di esser sufficiente che una tavola di logaritmi contenga i logaritmi de' soli numeri interi, è chiaro che per formare la cennata tavola bisognerà inserire fra i termini della progressione geometrica, cioè fra 1 e 10, fra 10 e 100, ec. tanti medii proporzionali, sicchè ne risulti una nuova progressione geometrica la quale contenga fra suoi termini tutti i numeri interi, o almeno sieno così prossimi ai numeri interi che, senza errore sensibile, possano considerarsi come tali. Ed inserendo pure altrettanti medii aritmetici fra i corrispondenti termini della progressione aritmetica, si avranno così i corrispondenti logaritmi de' numeri interi.

I medii geometrici possono inserirsi facendo uso della sola radice quadrata. Volendosi p. e. trovare il logaritmo di 2, siccome 2 è compreso fra 1 e 10, troveremo una media proporzionale fra 1 e 10 approssimata sino ad un certo grado, p. e. sino a' 1000^{mi}, la quale sarà 3,162; ma 2 essendo compreso fra 1 e questa media proporzionale, troveremo fra questa media ed 1 un' altra media proporzionale che sarà 1,778; e poichè 2 è compreso fra la prima e la seconda media, troveremo fra queste medie un' altra media proporzionale che sarà 2,371. Ed essendo 2 compreso fra la media 1,778 e l'altra 2,371, troveremo fra queste un' altra media che sarà 1,911; e poi con le medesime considerazioni ne troveremo un' altra che sarà 1,981 ; ed indi un' altra che sarà 2,007. Arrestandoci a quest' ultima media, che differisce da 2 per meno di un centesimo, la considereremo come eguale a 2.

Similmente operando rispetto alla progressione aritmetica, cioè trovando lo stesso numero di medii aritmetici fra i termini corrispondenti a quelli geometrici su cui si è operato, l' ultimo medio aritmetico che si otterrà sarà il logaritmo dell' ultimo medio geometrico ottenuto, cioè di 2,007, e si considererà come prossimamente eguale al logaritmo di 2.

Abbiamo trovato i medii espressi in 1000^{mi}, ma la teoria delle approssimazioni numeriche fa conoscere con quante cifre decimali bisogna estrarre la radice, affinchè l'ultimo risultato abbia quell' approssimazione che si desidera. I logaritmi

con cui sono costruite le tavole più usate si estendono sino a sette cifre decimali; ma vi sono anche le picciole tavole di Lalande con cinque decimali.

Quantunque col metodo esposto possano trovarsi i logaritmi de' numeri primi, pure i calcoli che esso richiede sono troppo lunghi e penosi; e però i matematici si sono occupati a ritrovare altri metodi assai più spediti, che si apprendono dall' algebra.

PROPRIETÀ DE' LOGARITMI ORDINARII.

355. Dalle due progressioni

$$\div \ldots 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots$$
$$\because \ldots 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \ldots$$

si vede che solamente i logaritmi di 10, 100, 1000, ec. sono interi; ma i logaritmi di tutti gli altri numeri hanno una parte intera ed una parte fratta che si esprime sempre in decimali. La parte intera si chiama *caratteristica*, perchè fa conoscere qual ordine di unità rappresenta la prima cifra a sinistra del numero corrispondente al logaritmo dato. In effetti, dando uno sguardo alle due progressioni, si vede che il numero avrà una, due, tre, ec. cifre nella parte intera, secondo che la caratteristica è 0, 1, 2, ec.: perciò la prima cifra del numero rappresenterà unità, decine, centinaia, ec. secondo che la caratteristica è 0, 1, 2, ec.

La parte decimale del logaritmo si chiama *mantissa* (*).

356. *I logaritmi de' numeri che sono decupli gli uni degli altri hanno la stessa mantissa.*

Sia, per esempio, il numero 864, il cui logaritmo è 2,9365137 Dividendo questo numero successivamente per 10, si avranno i logaritmi del quoziente togliendo dal logaritmo del dividendo quello del divisore 10, che è 1; perciò la sola caratteristica si diminuisce di un' unità, e la mantissa rimane la stessa, come quì appresso si vede

$$\log 864 = 2,9365137,$$
$$\log 86,4 = 1,9365137,$$
$$\log 8,64 = 0,9365137.$$

(*) Voce latina derivante da *manu-tensa*, e significa *giunta*; chiamandosi così quella giunta, che il venditore, distendendo la mano, soleva dare al compratore, oltre di quello che gli dava il peso e la misura.

Essendo giunti al numero 8,64 che diviso per 10 dà per quoziente una frazione, non eseguiremo la sottrazione; perchè così rimane vero il teorema enunciato rispetto alla mantissa, e dippiù la parte intera del logaritmo, la quale essa sola è negativa, può conservare il nome di caratteristica, perchè fa conoscere qual' ordine di unità rappresenta la prima cifra a sinistra del numero corrispondente al logaritmo dato. In effetti, questa cifra rappresenterà *decimi, centesimi, millesimi*, ec. secondo che la caratteristica è —1, —2, ec. come qui appresso si vede

$$\log 0{,}864 = 0{,}9365137-1,$$
$$\log 0{,}0864 = 0{,}9365137-2,$$
$$\log 0{,}00864 = 0{,}9365137-4.$$

Si è convenuto che le caratteristiche —1, —2, —3, ec. invece di scriversi a dritta si scrivono a sinistra nel luogo dove sta lo zero, ponendo il segno *meno* al di sopra del numero e non già avanti, per indicare che la sola caratteristica è negativa, e che la parte decimale è positiva. In tal modo si avrà

$$\log 0{,}864 = \bar{1}{,}9365137,$$
$$\log 0{,}0864 = \bar{2}{,}9365137,$$
$$\log 0{,}00864 = \bar{3}{,}9365137.$$

Per evitare le caratteristiche negative sogliono aggiungersi dieci unità al logaritmo di una frazione, e così la sua caratteristica diverrà 9, 8, 7, ec. secondo che essa era —1, —2, —3, ec. Queste caratteristiche positive adoperate invece della negative diconsi *caratteristiche apparenti*. Quindi si desume che *la prima cifra significativa a sinistra di una frazione decimale esprimerà decimi, centesimi, millesimi, ec. secondo la sua caratteristica apparente sarà 9, 8, 7, ec., ovvero secondo che la sua caratteristica vera è —1, —2, —3, ec.*

357. Per trovare i logaritmi de' numeri che non sono nelle tavole, conviene premettere le seguenti avvertenze.

Se nelle tavole facciamo attenzione alle differenze fra i logaritmi de'numeri consecutivi maggiori di 1000, si vede che queste differenze per un certo tratto sono eguali almeno sino alla sesta cifra decimale; e solo per i numeri prossimi a 1000 differiscono di poche unità del settimo ordine decimale; ma avvicinandosi a 2000 trovansi spesso eguali sino alla settima decimale, anzi per i numeri maggiori di 2500 possono ritenersi come sempre eguali sono alla settima decimale, salvo qual-

che differenza di una sola unità del settimo ordine decimale che di tratto in tratto apparisce.

La ragione di questo fatto si è perchè quantunque i numeri 1000, 1001, 1002, ec. a rigore sono in pregressione aritmetica, pure per breve tratto possono considerarsi in progressione geometrica, per essere i medesimi molto grandi rispetto alle loro differenze. In effetti i loro rapporti sono $\frac{1001}{1000}=1+\frac{1}{1000}$, $\frac{1002}{1001}=1+\frac{1}{1001}$, $\frac{1003}{1002}=1+\frac{1}{1002}$, col ove si vede che la differenza fra i due primi rapporti è $\frac{1}{1001000}$, e quella fra il secondo ed il terzo è $\frac{1}{1003002}$. Dunque queste differenze sono picciolissime, e tanto più sono tali quanto più i numeri sono grandi e la loro differenza è picciola; perciò i detti numeri possono considerarsi per breve tratto come formanti prossimamente una progressione geometrica, e quindi i loro logaritmi saranno pure prossimamente in progressione aritmetica; ecco perchè le differenze fra i logaritmi debbono essere eguali sino ad un certo numero di cifre decimali, come difatti avviene.

358. Ciò posto, se un numero maggiore di 1000, si aumenta di un'unità, il suo logaritmo riceve un certo aumento; e se si aumenta di 2, di 3 unità, ec. il suo logaritmo, come abbiamo osservato, riceve un aumento doppio, triplo, ec. Dunque: *gli aumenti di un numero maggiore di 1000 sono proporzionali a quelli del suo logaritmo, almeno sino alla sesta cifra decimale, purchè gli aumenti non oltrepassino presso a poco 3 unità.*

E però con più ragione ne' nostri calcoli, ne' quali, come vedremo, un numero maggiore di 1000 si aumenta una volta di un' unità, ed un' altra volta si aumenta di una frazione, gli aumenti di questo numero sono proporzionali a quelli del suo logaritmo, senza errore almeno sino alla sesta cifra decimale per i numeri maggiori di 1000 e minori di 2500; ma per i numeri maggiori di 2500 si può ritenere esservi esattezza sino alla settima cifra decimale, per quel che si è detto più sopra.

Non pertanto anche per i numeri minori di 2500 e maggiori di 1000 gli aumenti si reputano proporzionali sino alla settima decimale; perchè, lo ripetiamo, ne' calcoli che bisognerà fare, gli aumenti dello stesso numero sono uno minore e

l' altro eguale all' unità, ed anche perchè mancano poche unità del settimo ordine decimale per potersi dire eguali le differenze fra tre logaritmi consecutivi.

Queste differenze poi vanno sempre più impiccolendo a misura che i numeri sono grandi. Difatti, indicando con a, ed $a+1$ due numeri consecutivi, la differenza fra i loro logaritmi sarà $\log(a+1)-\log a=\log\frac{a+1}{a}=\log\left(\frac{a}{a}+\frac{1}{a}\right)=\log\left(1+\frac{1}{a}\right)$:

Ora a misura che cresce a, la quantità $1+\frac{1}{a}$ si accosta all' unità, e quindi il suo logaritmo si accosta a zero; perciò le differenze fra i logaritmi de' numeri consecutivi si accostano a zero a misura che i numeri sono grandi; e se le tavole si prolungassero sino ad 1 milione, le differenze sarebbero di una sola cifra del settimo ordine decimale, e prolungandole sino a 10 milioni, non vi sarebbero più differenze nelle tavole con 7 decimali.

USO DEL COMPLEMENTO ARITMETICO.

359. Nel calcolo logaritmico si fa spesso uso del complemento aritmetico, e ciò nel prendere il logaritmo di un numero frazionario. Così p. e. se deve prendersi il logaritmo della frazione $\frac{23146}{58379\times75834\times71936}$, sappiamo che si ottiene togliendo da quello del numeratore l'altro del denominatore; ma il denominatore per essere un prodotto, il suo logaritmo è uguale a $\log 58379+\log 75834+\log 71936$; perciò il logaritmo della frazione sarà $\log 23146-\log 58379-\log 75834-\log 71936$; dunque, per ottenersi, debbono farsi tre sottrazioni, ovvero un'addizione ed una sottrazione, perchè si possono addizionare prima i tre logaritmi da togliersi, e poi la somma si sottrarrà del logaritmo di 23146.

Per evitare le tre sottrazioni, ovvero l' addizione e la sottrazione, si farà una sola addizione aggiungendo al logaritmo del numeratore i complementi dei logaritmi del denominatori; questi complementi si prendono sul numero 10, perchè i numeri corrispondenti a' logaritmi ordinariamente non hanno più di dieci cifre nelle parte intera; e perciò i logaritmi non avendo la ca-

ratteristica maggiore di 9, i loro complementi devono prendersi sul numero 10; e diconsi *complementi logaritmici*. Indicando con l' iniziale C il complemento, il logaritmo della frazione proposta sarà log.23146+Clog.58379+Clog.75834+Clog.71936.

Questo risultato contiene tre decine dippiù, perchè vi sono tre complementi logaritmici ciascun dei quali contiene una decina dippiù, perciò debbono togliersi tre decine dal risultato per avere il logaritmo vero della frazione proposta. Or se la frazione è maggiore dell' unità il suo logaritmo sarà positivo, e togliendo le tre decine che sono dippiù nel risultato il resto sarà positivo, e sarà il logaritmo vero della frazione proposta; se poi la frazione è minore dell'unità il suo logaritmo sarà negativo, perciò togliendo le tre decine del risultato questo rimarrà negativo, ma perchè i logaritmi delle frazioni non si adoperano tutti negativi, ma si usano con la sola caratteristica negativa e la mantissa positiva, ovvero tutti positivi con caratteristica apparente, i quali tengono una decina dippiù del logaritmo vero; perciò volendoli usare in quest' ultima maniera, che è la più comoda, invece di togliere dal risultato tutte le decine che tiene dippiù; se ne tolgono tanto sicchè vi resti una sola decina dippiù, quindi nel nostro esempio convien togliere solo due decine, e si otterrà così il logaritmo cercato della frazione, il quale avrà la caratteristica apparente.

360. Allorchè da un numero a si deve togliere un logaritmo negativo, che indichiamo con $-h$, il risultato sarà $a-(-h)=a+h$, (n°. 347); ma siccome invece del logaritmo negativo si ha il suo complemento che è $10-h$, per fare la sottrazione si adopera il complemento del detto complemento che è $10-(10-h)$; quindi il risultato sarà $a+10-10+h$, ossia $a+h$; cioè il risultato sarà giusto quello che si doveva avere, senza 10 unità dippiù.

Dunque quando da un numero si deve togliere un logaritmo negativo, e di questo logaritmo si ha il complemento, e per fare la sottrazione si adopera il complemento di questo complemento, il risultato sarà giusto quello che si cerca, senza 10 unità dippiù.

Così p. e. se dovesse prendersi il logaritmo dell' espressione frazionaria $\frac{3}{5/7}$, esso è uguale a $\log 3-\log {}^5/_7$, dove $\log {}^5/_7$ che deve togliersi è negativo; e siccome in sua vece supponiamo che si abbia il complemento, si prenderà il complemento di questo complemento e si aggiungerà a log.3, ed il risultato sarà il logaritmo cercato, senza 10 unità dippiù.

361. In ultimo facciamo osservare che quando si ha il complemento di un logaritmo, e da questo complemento si vuole ritornare al logaritmo, basterà prendere il complemento del detto complemento. Così p. e. se 10—h è il complemento del logaritmo h di un numero; prendendo il complemento di 10—h, si ritorna al logaritmo; perchè si otterrà 10—(10—h)=10—10+h=h.

MANEGGIO DELLE TAVOLE DE' LOGARITMI.

361. Ogni tavola porta avanti di sè la spiega della disposizione che essa tiene, e del modo di farne uso.

Le tavole che più comunemente si praticano fra noi sono quelle di Lalande che si estendono sino a 10000, e quelle di Callet che giungono sino a 100800. Noi ci eserciteremo in qualche esempio, facendo uso delle tavole di Lalande con sette cifre decimali.

In queste tavole trovansi tre colonne, la prima de' numeri interi consecutivi, la seconda a dritta della prima è quella dei loro logaritmi, e la terza a dritta della seconda contiene le differenze fra due logaritmi successivi. E però se nella tavola voglia trovarsi il logaritmo di qualunque numero intero sino a 10000, per esempio del numero 4372, si troverà scritto alla sua dritta e sarà 3,6406802.

Per trovare poi il logaritmo di un numero qualunque che non sia nella tavola, opereremo come viene indicato nei seguenti esempi.

Esempio I. *Trovare il logaritmo del numero intero 2506934.*

362. La *caratteristica* del cercato logaritmo si conosce subito essere 6, perchè deve avere tante unità quante sono le cifre del numero meno una.

Per trovare poi la *mantissa*, siccome le tavole di cui ci serviamo si estendono sino a 10000, divideremo il numero tante volte per 10 finchè si riduce ad un numero compreso fra 1000 e 10000; per il che distaccheremo tre cifre decimali dalla sua dritta, e ne verrà il numero 2506,934; poi troveremo la mantissa del logaritmo di quest' ultimo numero, la quale sarà eguale a quella del logaritmo del numero proposto (n.° 356). Per ottenere questa mantissa osserviamo che 2506,934 essendo compreso fra i numeri 2506 e 2507 i quali hanno quattro cifre, possiamo applicarci il principio stabilito (n.° 358), cioè

che gli aumenti de' numeri sono proporzionali a quelli de' logaritmi; e siccome dalle tavole si ha che log.2506=3,3989811; e log.2507=3,3991543, e la loro differenza è 1732; perciò si dirà: se il numero 2506 accresciuto di 1, il suo logaritmo aumenta di 1732 diecimilionesimi, accrescendosi di 0,934; di quanti diecimilionesimi aumenterà il suo logaritmo?

Si avrà quindi la proporzione 1 : 0,934 :: 1732 : x, da cui si ricava $x=1732\times0{,}934=1617{,}688$.

Or poichè la parte intera di x esprime diecimilionesimi, la parte decimale ,688 esprimerà millesimi di un diecimilionesimo. perciò potrà disprezzarsi, con la regola del n.° 218, e si avrà $x=1618$ diecimilionesimi. Questo numero di diecimilionesimi, è quello che bisogna aggiungere al logaritmo di 2506, per avere il logaritmo del numero 2506,934; perciò si avrà log 2706,934=3,3991429; e poichè la mantissa di questo logaritmo è uguale a quella del logaritmo del numero proposto, si avrà log 2506934=6,3991429.

Il detto numero x trovandosi per mezzo di una proporzione, si chiama *parte proporzionale*; perciò lo dinoteremo con le lettere iniziali *P. p.*, e indicheremo la mantissa con *M*.

Nel far la moltiplicazione per trovare la parte proporzionale, se le cifre che restano separate a dritta della virgola nel numero dato sono più di quante ne ha la differenza tavolare, si terrà conto solamente di tante cifre quante ne ha la differenza tavolare, e le altre a dritta si disprezzano per una ragione che diremo fra poco.

Il calcolo s' intavola nel seguente modo

log 2506934	=	6+*M*.log 2506,934
M.log 2506	=	0,3989811
*P.p.*1732×0,934	=	1618
log 2506934	=	6,3991429

Esempio II. *Trovare il logaritmo del numero decimale 41,082394.*

Primieramente si vede che la caratteristica è 1, perchè la parte intera del numero tiene due cifre. Per trovare poi la mantissa si trasporterà la virgola in modo che la parte intera divenga di quattro cifre; e però in questo esempio bisogna trasferirla di due posti verso dritta, e così il numero si moltiplica due volte per 10, e viene eguale a 4708,2394, il cui logaritmo ha la stessa mantissa del logaritmo del numero proposto (n.° 356).

Dunque la questione si è ridotta a trovare la mantissa del logaritmo del numero 4708,2394, perciò si opererà della stessa guisa che nell' esempio precedente, come qui appresso si vede

$$\begin{array}{ll}
\log 47,082394 & = 1+M.\log 4708,2394 \\
M.\log 4708 & = 0,6728365 \\
P.p.=922 \times 0,239 & = \quad 220 \\
\log 47,082394 & = 1,6728585.
\end{array}$$

ESEMPIO III. *Trovare il logaritmo della frazione decimale 0,023987.*

La caratteristica sarà $\bar{2}$, perchè la prima cifra significativa della frazione esprime centesimi. Per trovare poi la mantissa si opererà come nell' esempio precedente, e la questione si ridurrà a trovare la mantissa del logaritmo di 2389,7 che equivale a quella del logaritmo del numero proposto. Ecco qui appresso il tipo del calcolo

$$\begin{array}{ll}
\log 0,023987 & = \bar{2}+M.\log 2398,7 \\
M.\log 2398 & = 0,3798492 \\
P.p.=1810 \times 0,7 & = \quad 1267 \\
\log 0,023987 & = \bar{2},3799759
\end{array}$$

Se si facesse uso della caratteristica apparente il logaritmo cercato sarà 8,3799759.

363. Prima di passare alla ricerca di logaritmi delle frazioni è importante avvertire che il logaritmo di un numero intero o decimale, p. e. del numero 563872, dopo averlo ridotto ad aver quattro cifre nella parte intera, cioè a 5638,72, può anche trovarsi togliendo dal logaritmo del numero 5639 prossimamente maggiore la parte proporzionale dovuta alla differenza fra questo ed il numero 5638,72, la quale differenza si ottiene togliendo 72 da 100, ossia prendendo il complemento di 72.

Ecco qui appresso il tipo del calcolo.

$$\begin{array}{ll}
\log 563872 & = 5+M.\log 5638,72 \\
M.\log 5639 & = 0,7512021 \\
P.p. 770 \times 0,28 & = \quad 216 \\
\log 563872 & = 5,7511805
\end{array}$$

Questo modo di trovare il logaritmo è preferibile quando voglia prendersi il suo complemento. Difatti, dopo aver ridotto il numero dato ad aver quattro cifre nella parte intera, indichiamo con N il numero così ridotto, e con H il prossimamente maggiore, e con p la parte proporzionale dovuta alla differenza fra N ed H, il logaritmo di N sarà $\log H-p$; ed il

complemento sarà $10-\log H+p$; ma $10-\log H$ è il complemento del logaritmo del numero tavolare prossimamente maggiore di N, il quale si ottiene leggendolo nella tavola. Dunque aggiungendo a questo complemento la surriferita parte proporzionale; si avrà il complemento logaritmico cercato.

Così volendo prendere il complemento del logaritmo di 854241; siccome il complemento della caratteristica è 4, resta a prendersi il complemento della mantissa; perciò riducendo il numero ad aver quattro cifre nella parte intera, dovremo trovare il complemento della mantissa del logaritmo di 8542,41. Indicando questo complemento con le lettere iniziali $C.\ m.$, si avrà

$$\begin{array}{lcl} C.\log 854241 & = & 4+C.m.\log 8542,41 \\ C.m \log 8543 & = & 0,0683896 \\ P.p.508\times 0,59 & = & 300 \\ \hline C.\log 854241 & = & 4,0684196 \end{array}$$

364. Sia ora da trovarsi il logaritmo della frazione $\frac{85}{397}$;
siccome esso si ottiene togliendo dal logaritmo del numeratore quello del denominatore, invece di sottrarre, aggiungeremo il complemento del logaritmo del denominatore, e si avrà così il logaritmo della frazione con 10 unità dippiù. Queste 10 unità si toglieranno dal risultato ottenuto quando la frazione è spuria; ma quando è vera non si tolgono se la caratteristica si vuole apparente, come ordinariamente succede; se poi si volesse il logaritmo con la caratteristica negativa, le 10 unità si tolgono dalla sola caratteristica. Ecco qui appresso due esempi.

Esempio I. $\log\frac{13564}{897} = \begin{cases} 4,1322597 \\ \quad\ \ 1280 \\ 7,0472076 \\ \hline 11,1795953 \end{cases}$

E togliendo le 10 unità, il logaritmo cercato sarà 1,1795953.

Esempio II. $\log\frac{95}{352172} = \begin{cases} 1,9777236 \\ 4,4532106 \\ \qquad 345 \\ \hline 6,4309687 \end{cases}$

La caratteristica 6 è apparente, perciò il logaritmo con la caratteristica vera è $\bar{4},4309687$.

365. Nel n.° 156 si osservò il vantaggio che si ha dall'usare i logaritmi delle frazioni con la parte decimale positiva; ma se si volesse il logaritmo della frazione tutto negativo, converrebbe togliere la mantissa da 1, cioè prenderne il complemento, e questo complemento unito alla caratteristica negativa diminuita di un'unità sarebbe il logaritmo negativo della frazione. Così nell'ultimo esempio il logaritmo della frazione essendo $\bar{4},4309687$, quello tutto negativo sarà $-3,5690313$. Viceversa,

avendosi il logaritmo tutto negativo di una frazione, se si volesse quello con la parte decimale positiva, converrebbe aggiungere un' unità alla parte intera e si avrà la caratteristica ; e prendendo il complemento della parte decimale si avrà la mantissa.

366. Allorchè le cifre decimali che restano separate a dritta del numero dato sono più di tre, basta tener conto delle sole prime tre a dritta della virgola nel fare la moltiplicazione per ottenere la parte proporzionale. Così, p. es., se dovesse trovarsi il logaritmo di 4983,15742, la parte proporzionale sarebbe $871 \times 0,15742$: or questa può ottenersi ritenendo le sole prime tre cifre del fattore 0,15742. In effetti, le altre che si disprezzano fanno meno di 1 millesimo (n.° 19) ; perciò la parte proporzionale $871 \times 0,157$ che si ottiene, differisce dalla cercata per meno di $871 \times 0,001$, ossia di 0,871 ; e siccome le unità rappresentate dal prodotto sono dell' ordine de' diecimilionesimi, la differenza sarà minore di un diecimilionesimo; perciò può trascurarsi.

Le medesime considerazioni fanno vedere che se la differenza tavolare è di quattro cifre, allora nel far la moltiplicazione basta tener conto delle prime quattro cifre a dritta della virgola, affinchè il risultato differisca da quello cercato per meno di un diecimilionesimo.

In generale, basta tener conto di tante cifre a dritta della virgola quante sono quelle della differenza tavolare.

TROVARE IL NUMERO CORRISPONDENTE AD UN DATO LOGARITMO

367. Sia primieramente da trovarsi il numero corrispondente al logaritmo 3,6275891 avente per caratteristica 3, che è la massima la quale trovasi nelle tavole.

Si cercherà nelle tavole il logaritmo prossimamente minore del dato che è 3,6275707 , e si vede il numero a cui corrisponde che è 4242; poi si prenderà la differenza fra il logaritmo dato ed il prossimamente minore , la quale è 184 diecimilionesimi. Or poichè il logaritmo tavolare prossimamente minore del dato corrisponde al numero 4242, ed il prossimamente maggiore corrisponde al numero 4243, il numero cercato sarà compreso fra 4242 e 4243; quindi per trovare l' aumento da darsi al numero 4242 per avere il cercato, ricorreremo alla proporzione che gli aumenti de' numeri sono proporzionali a quelli dei loro logaritmi. Perciò si dirà: se il numero 4242 aumentato di 1 il suo logaritmo aumenta della differenza tavolare 1023 diecimilionesimi, quale sarà l' aumento del nu-

mero quando il suo logaritmo si accresce di 184 diecimilionesimi, che è la differenza fra il logaritmo dato ed il prossimamente minore? quindi si avrà al proporzione
1023 : 184 :: 1 : x, da cui si ricava $x=\frac{184}{1023}$.

Adunque l' aumento da aggiungersi al numero corrispondente al logaritmo prossimamente minore del dato per avere il numero cercato, sarà il quoziente che si ottiene dividendo la differenza fra la mantissa data e la prossimamente minore per la differenza tavolare.

La divisione non si spingerà oltre ai centesimi, per una ragione che diremo fra breve; nel nostro esempio l' aumento x viene eguale 0,18 che aggiunto al numero 4242 darà il numero cercato eguale a 4242,18.

Ecco qui appresso il tipo del calcolo

$\log x$	=	3,6275891
$\log 4242$	=	 707
Dif.		184

$P.p.\ \frac{184}{1023}=0,18 \qquad x=4242,18$

368. Allorchè si altera la caratteristica del logaritmo di un numero, il nuovo logaritmo corrisponde ad un altro numero che è eguale al primo moltiplicato o diviso per 10, 100, 1000, ec., secondo che la caratteristica si è aumentata o diminuita di 1, 2, 3, ec. unità; il che vuol dire che le cifre del numero restano come si trovavano, col medesimo ordine disposte, e la sola virgola cambia di sito; perciò può avvenire solamente che vi si trovino aggiunti zeri a dritta o a sinistra.

Ciò posto, se fosse dato un logaritmo la cui caratteristica è diversa da 3. p. e. il logaritmo 5,0132659, ridurremo la caratteristica a 3, cioè alla massima che trovasi nelle tavole affinchè vi si possa applicare la proporzione che gli aumenti de' numeri sono proporzionali a quelli de' loro logaritmi; e poi cercheremo il numero che ha per logaritmo 3,0132659 come nell'esempio precedente, il quale si troverà essere 1031,02. Or siccome questo numero ha le stesse cifre del numero cercato con lo stesso ordine disposte; per avere il numero cercato, altro non bisognerà fare che trasferire la virgola in modo che la prima cifra a sinistra esprima unità dell' ordine richiesto dalla caratteristica del logaritmo dato, le quali in questo esempio sono centinaia di migliaia; quindi il numero cercato sarà 103102.

Esempio. *Trovare il numero corrispondente al logaritmo 0,7184852.*

Sostituendo alla caratteristica 0 la caratteristica 3, si cercherà il numero corrispondente al logaritmo 3,7184852, il quale si troverà essere 5229,81, e le sue cifre sono le stesse che quelle del numero cercato col medesimo ordine disposte; ma la caratteristica 0 indicando che la prima cifra a sinistra del numero deve esprimere unità semplici; perciò il numero cercato sarà 5,22981.

Esempio. *Trovare il numero corrispondente al logaritmo $\bar{2}$,4031213.*

Sostituiremo la caratteristica 3 all'altra $\bar{2}$, e cercheremo il numero corrispondente al logaritmo 3,4031213, che si troverà essere 2530,01; ma la caratteristica $\bar{2}$ dinotando che la prima cifra a sinistra del numero deve esprimere centesimi; perciò il numero cercato sarà 0,0253001.

Se la caratteristica fosse apparente, la prima cifra del numero cercato esprimerà 10^{mi}, 100^{mi}, 1000^{mi}, ec., secondo che la caratteristica è 9, 8, 7, ec.

369. Abbiamo veduto che quando è dato il logaritmo e si cerca il numero corrispondente, la parte proporzionale si ottiene dividendo la differenza fra la mantissa data e la prossimamente minore scritta nella tavola per la differenza tavolare. Ora supposto che questa parte proporzionale sia $\frac{316}{1345}$, l'errore sarà minore di $\frac{1}{1345}$; ma perchè il quoziente suole esprimersi sempre in decimali, ed il decimale in cui si svolge la frazione $\frac{316}{1345}$ si vuole che differisca dal vero valore della parte proporzionale per meno di un' unità dell' infimo ordine decimale; se dinotiamo con m il numero che indica quest' ordine, il decimale in cui si svolge la detta frazione con l' ultima cifra corretta differirà da essa frazione per meno di $\frac{1}{2m}$; ma la nominata frazione non essendo esatta, e peccando a un di presso per $\frac{1}{1345}$, tutto l'errore di cui la frazione decimale differisce dalla parte proporzionale cercata sarà al massimo $\frac{1}{1345}+\frac{1}{2m}$. Ora volendosi che questo errore sia minore di un' unità del-

l' infimo ordine decimale cioè di $\frac{1}{m}$, dovrà aversi

$$\frac{1}{1343}+\frac{1}{2m}<\frac{1}{m}\ (^*),\ \text{ossia}\ \frac{1}{1343}+\frac{1}{2m}<\frac{2}{2m}$$; e toglien-do $\frac{1}{2m}$ dalle due grandezze inegnali, verrà $\frac{1}{1346}<\frac{1}{2m}$, che sarà vero quando $1345>2m$.

Perciò, affinchè possa ottenersi un'approsimazione sino ai 100^{mi}, la differenza tavolare dev'essere maggiore di 200, il che si verifica in tutto il corso delle tavole di Lalande a 7 decimali.

Con ciò potrebbe credersi che l'approssimazione possa spingersi sino a' 1000^{mi} per i numeri minori di 2172 rispetto a' quali la differenza tavolare è maggiore del doppio di 1000; ma ricordando che per questi numeri non si può contare sull'esattezza della proporzione sino alla settima decimale (n.° 358); perciò anche per questi numeri non conviene spingere la divisione oltre ai centesimi.

370. Applichiamo i logaritmi ad estrarre la radice quinta della frazione $\frac{(32,278)^2\times0,0853}{458,4\times0,79246}$. Prendendo i logaritmi si ha

$$\log\sqrt[5]{\frac{(32,278)^2\times0,0853}{458,4\times0,79246}}=\frac{1}{5}\left\{\begin{array}{ll}2\times\log 32,278 & =3,0178132\\ +\log 0,0853 & =8,9309490\\ +C.\log 458,4 & =7,3387554\\ +C.\log 0,79246 & =0,1010226\\ \hline & 19,3885402\end{array}\right.$$

Qui il risultato tiene due decine di più, perchè il secondo logaritmo ha la caratteristica apparente, ed il terzo è un complemento, mentre il quarto essendo complemento di un complemento non porta niente di più al risultato (n° 360); e siccome togliendone le due decine soverchie il risultato diviene negativo, ciò vuol dire che il numero da cui deve estrarsi la radice quinta è minore dell'unità; perciò questa radice sarà pure minore dell'unità. Ora volendo noi adoperare il logaritmo con caratteristica apparente, il quale ha una sola decina dippiù, bisogna aggiungere altre 3 decine alla caratteristica 19, affinchè dividendo poi per 5, il risultato abbia una sola decina dippiù;

(*) Per indicare che due grandezze sono diseguali, si adopera il segno $<$ che dicesi *segno d'ineguaglianza*, ponendo la quantità maggiore dalla parte dell'apertura del segno, e la quantità minore dalla parte opposta.

quindi la caratteristica 19 si considera come se fosse 49, e dividendo per 5, si avrà 9,8777080 che è il logaritmo con caratteristica apparente della cercata radice, ed il numero corrispondente ossia la radice cercata sarà eguale a 0,754584.

Se si volesse adoperare il logaritmo con caratteristica negativa, si toglierà 10 dalla sola caratteristica del logaritmo 9,777080, ed il logaritmo vero della cercata radice sarà $\bar{1}$,8777080.

Sia per ultimo esempio da calcolarsi la frazione $\frac{0,5479}{(0,68674)^3}$.

Prendendo i logaritmi si avrà

$$\log\frac{0,5479}{(0,68674)^3}=\begin{cases}\log 0,5479 & =9,7387013\\ C.3\times\log 0,68674 & =0,4896231\end{cases}$$
$$10,2283244$$

Ora nel calcolare, siccome si ha log 0,68674 =9,8367923, il quale tiene una decina dippiù, moltiplicandosi poi per 3, il prodotto 29,5103769 risulta con 3 decine dippiù, perciò ne toglieremo 2 decine per avere $3\times\log 0,68674$ con una sola decina dippiù, e viene eguale a 9,5103769; o prendendone il complemento si avrà $C.3\times\log 0,68674=0,4896231$, che sommato con log 0,5479 dà per risultato 10,2283244, il quale tiene una sola decina dippiù per la presenza di log 0,5479 che è con caratteristica apparente, e non già per la presenza di $C.3\times\log 68674$ il quale, essendo complemento di un complemento, non porta niente dippiù al risultato. Togliendo questa decine dal risultato, si avrà il logaritmo della frazione spuria cercata, la quale viene eguale ad 1,6917.

RELAZIONE FRA I DIVERSI SISTEMI DI LOGARITMI.

371. Abbiamo veduto (n° 353), che la diversità dei sistemi dipende dal numero che ha per logaritmo l' unità, il quale si chiama *base* del sistema; passiamo ora a vedere la relazione che esiste fra i logaritmi di un sistema e quelli di un altro sistema.

372. *Il rapporto fra i logaritmi di due numeri in un medesimo sistema non cambia, qualunque sia il sistema.*

Indichiamo con H e K due numeri, e con $\frac{m}{n}$ il rapporto dei loro logaritmi presi in un medesimo sistema, ed indichiamo con la caratteristica l questi logaritmi: si avrà $\frac{lH}{lK}=\frac{m}{n}$; e moltiplicando i due membri per il prodotto dei denominatori, verrà $n\times lH=m\times lK$, da cui si ricava (n.° 309) $lH^n=lK^m$.

e quindi $H^n = K^m$. Prendiamo ora i logaritmi di H^n e di K^m in un altro sistema, ed indichiamo con l' questi logaritmi, si avrà $l'H^n = l'K^m$, ovvero $n \times l'H = m \times l'K$; e dividendo per $n \times l'K$, verrà $\frac{l'H}{l'K} = \frac{m}{n}$. Ecco dunque dimostrato che il rapporto dei logaritmi di H e K in un altro sistema è pure eguale ad $\frac{m}{n}$.

373. *Il rapporto dei logaritmi del medesimo numero in due diversi sistemi non cambia, qualunque sia il numero.*

In effetti, essendosi veduto che $\frac{lH}{lK} = \frac{l'H}{l'K}$, sarà ancora $\frac{lH}{l'H} = \frac{lK}{l'K}$; vale a dire che qualunque sieno i numeri H e K, il rapporto dei logaritmi di H nei due sistemi, è uguale a quello dei logaritmi di K nei medesimi sistemi.

Ora se indichiamo con r questo rapporto, si avrà $\frac{lH}{l'H} = r$, e quindi $lH = r \times l'H$.

Da ciò segue che quando si conosce il logaritmo di un numero in un sistema, si può trovare il logaritmo del medesimo numero in un altro sistema moltiplicando il logaritmo del numero preso nel primo sistema per la quantità costante r, la quale si chiama *modulo* del nuovo sistema rispetto al primo sistema.

374. Per determinare facilmente il modulo, che indichiamo con M, osserviamo che essendo $M = \frac{lH}{l'H}$, possiamo prendere H eguale alla base del nuovo sistema di cui vogliónsi calcolare i logaritmi, e che è quello la cui caratteristica è l; indicando con A questa base, si avrà $M = \frac{1}{l'A}$. Perciò il modulo di un sistema rispetto ad un secondo sistema, è uguale all' unità divisa per il logaritmo della base del primo sistema, preso nel secondo sistema.

Se fosse dato il modulo di un sistema d' ignota base rispetto ad un altro sistema conosciuto, si può trovare la base incognita, imperocchè, indicando con z questa base, si ha $M = \frac{1}{l'z}$, ossia $l'z = \frac{1}{M}$, da cui si ricava z, perchè è conosciuto il suo logaritmo.

Se si volessero calcolare i logaritmi del sistema *neperiano*, la cui base è il numero incommensurabile 2,718281828..., che suole dinotarsi con e, ricavandoli da quelli del sistema *briggiano*, si dovranno moltiplicare quelli del sistema briggiano per l'unità divisa per il logaritmo della base neperiana, preso nel sistema briggiano, il quale è uguale a 2,30258..., ed è il modulo del sistema neperiano rispetto al briggiano.

CAP. II.

Interessi composti, annualità, vitalizi, interessi a scalare ecc.

375. Nel n. 305, si disse ciò che deve intendersi per interesse composto, ma ora siamo al caso di risolvere le questioni relative ad esso. In tali questioni, invece di far uso dell' interesse corrispondente al capitale elementare 100, è più comodo usare l'interesse corrispondente al capitale 1, il quale si ottiene subito, prendendo la centesima parte di quello dovuto al capitale 100. Così p.e. se l' interesse di 100 è 7,25, quello di 1 sarà 0,0725.

Ciò premesso, indicando con a il capitale, e con r la rendita dell'unità; siccome il capitale 1 dopo un anno diviene $1+r$, il capitale a diviene $a(1+r)$: cioè il valore di un capitale dopo l'anno si ottiene moltiplicandolo per l' unità accresciuta della rendita dell'unità: ciò fu anche dimostrato nel n.° 304.

Ora se il capitale a dopo un anno diviene $a(1+r)$, dopo 2 anni diverrà $a(1+r)(1+r)=a(1+r)^2$, e dopo 3 anni diverrà $a(1+r)(1+r)(1+r)=a(1+r)^3$; e similmente procedendo si scorge che dopo n anni diverrà $a(1+r)^n$. Indicando dunque con A il valore che acquista il capitale dopo n anni, si avrà $A=a(1+r)^n$. Questa è dunque la relazione che esiste fra le quattro quantità A, a, r, n, da cui potrà ricavarsi una di esse quando sono conosciute le altre tre. A tal fine porremo questa relazione sotto un'altra forma prendendone i logaritmi, e si avrà (n.i 349 e 351) $\log A=\log a+\log(1+r)^n$ ossia

$$\log A=\log a+n \log (1+r) \quad [1]$$

376. Passiamo ora a risolvere i problemi che dipendono da questa relazione.

Esempio I. *Qual valore acquista dopo 12 anni un capitale di 2000 lire, impiegato ad interesse composto al 5 ½ p %?*

La relazione [1] darà subito $\log A=\log 2000+12\times\log 1,055$; ed eseguendo il calcolo verrà

$$\left.\begin{aligned}\log 2000 &= 3,3010300\\ 12\times\log 1,055 &= 0,2790300\\ \log A &= 3,5800600\end{aligned}\right\} A=3802,82$$

Esempio II. *Qual è quel capitale che, impiegato al 6 ½ p. % ad interesse composto, dopo 8 anni diviene eguale a 6000 lire?*

Togliendo $n \log(1+r)$ da' due membri dell' eguaglianza [1] si avrà

$$\log A-n\log(1+r)=\log a;$$

e quindi viene $\log a = \log 6000 + C.8 \log 1,0625$; ed eseguendo il calcolo verrà

$$\begin{array}{lcl} \log 6000 & = & 3,7781513 \\ C.8\ \log 1,0625 & = & 9,7893688 \\ \log a & = & \overline{3,5675201} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 8\log 1,0625 = 0,2106322 \\ \\ a = 3694,29 \end{array} \right.$$

Si poteva prendere prima il complemento di $\log 1,0625$ e poi moltiplicarlo per 8, ma allora il prodotto risultando con 8 decine dippiù, bisognerebbe togliere 7 decine, affinchè rimanesse con una sola decina dippiù, e così resterebbe lo stesso numero 9,7893688.

Sarebbe stato egualmente facile togliere $\log 1,0625$, invece di prenderne il complemento.

Esempio III. *Si domanda dopo quanto tempo si raddoppia il capitale di 1800 lire, impiegato al 7 °/₀ ad interesse composto.*

Togliendo $\log a$ da' due membri della relazione [1] si avrà $\log A - \log a = n \log(1+r)$, ovvero $\log \frac{A}{a} = n \log(1+r)$, e dividendo i due membri per $\log(1+r)$, verrà $n = \frac{\log \frac{A}{a}}{\log(1+r)}$.

Da qui si vede che il valore di n resta lo stesso variando i capitali A ed a, purchè non cambi il rapporto e la tassa.

Nel nostro esempio viene $n = \frac{\log 2}{\log 1,07} = \frac{0,3010300}{0,0295833}$; trovando questo quoziente con i logaritmi, si avrà $n = 10,2448 = 10$ anni ed 89 giorni.

Esempio IV. *A qual ragione deve impiegarsi il capitale di 1200 lire ad interesse composto, affinchè dopo 4 anni divenga 1500 lire.*

Togliendo, come nell' esempio precedente, $\log a$ dai due membri dell' eguaglianza [1], e ne verrà $\log A - \log a = n \log(1+r)$, ovvero $\log \frac{A}{a} = n \log(1+r)$, e dividendo i due membri per n si avrà $\log(1+r)$, e quindi $1+r$; e togliendo l' unità dal risultato si troverà r. Nel nostro esempio viene $r = 0,05747$; perciò l' interesse di 100 sarà lire 5,74.

In questo problema, in modo analogo al precedente, si vede che la tassa dell' interesse non cambia variando i capitali A ed a, purchè rimanga lo stesso il loro rapporto ed il tempo.

Avvertimento. La formola [1] poggiando sulla ipotesi di n intero non è esatta quando n fosse un numero frazionario, che indico con $h + \frac{p}{q}$; ma essa dà per A un valore maggiore del vero. In tal caso per trovare il valore esatto di A si trova prima ciò che diviene a dopo la parte intera h del tempo, e sappiamo che diviene $a(1+r)^h$, e poi a questo valore si aggiunge l'interesse semplice che esso dà dopo la frazione $\frac{p}{q}$ di tempo, il quale interesse è $a(1+r)^h \times \frac{rp}{q}$; quindi il valore di A sarà $a(1+r)^h + a(1+r)^h \times \frac{rp}{q} = a(1+r)^h(1+\frac{rp}{q})$.

Così p. e. supposto essere $n=2\,{}^3/_4$, $a=6000$, ed $r=0,1$; calcolando A con la formola [1], che in questo caso è inesatta, si trova $A=7804,50$; e calcolando A con l'ultima formola, si trova $A=7797,90$; quindi il primo valore differisce dal secondo, che è il vero, di 6,60.

Per mostrare che A calcolato con la formola [1] è maggiore di A calcolato con la seconda formola, basta far vedere che $(1+r)^{\frac{p}{q}} > 1+\frac{rp}{q}$, cosa che non è difficile a provare. Intanto giova osservare che la seconda formola è insufficiente a dare il tempo quando è dato A, perchè in essa si trovano due incognite A e $\frac{p}{q}$; mentre la formola [1] dà esattamente la parte intera h del tempo.

377. Nel n.° 305 dicemmo che per *annualità* s'intendeva un pagamento annuale, che si fa in rate eguali per estinguere un debito dopo un certo numero di anni. Ora siamo nel grado di risolvere le quistioni relative all' annualità.

Vogliasi estinguere con pagamenti annui di rate eguali un debito A tassato ad una certa ragione, ad interesse composto.

Indichiamo con r la tassa dell' unità, e con n il numero degli anni in cui si vuole estinguere il debito; sappiamo (n. 375) che la somma A dopo n anni diviene $A(1+r)^n$; dunque le rate annuali che debbono pagarsi devono esser tali che unite agl'interessi composti da esse prodotti, dopo n anni facciano la somma $A(1+r)^n$.

Ora, se indichiamo con a l' annualità incognita, quella che si paga il primo anno, dopo $n-1$ anni diviene $a(1+r)^{n-1}$; quella che si paga il secondo anno, dopo $n-2$ anni diviene $a(1+r)^{n-2}$; quella che si paga il terzo anno, dopo $n-3$ anni diviene $a(1+r)^{n-3}$; e similmente seguitando si vede che quella la quale si paga dopo $n-1$ anni, dopo un anno diviene $a(1+r)$, e quella che si paga l'ultimo anno è a.

Perciò la somma di tutte le rate con i frutti prodotti sarà

$$a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-3}+a(1+r)+a,$$

la quale essendo la somma dei termini di una progressione geometrica, che ha per primo termine a, e per ultimo $a\,(1+r)^{n-1}$, e la ragione è $1+r$, sarà eguale (n. 342) ad

$$\frac{a(1+r)^{n-1}\,(1+r)-a}{1+r-1}=\frac{a\left((1+r)^n-1\right)}{r};$$

ma abbiamo detto che la medesima somma deve eguagliare $A\,(1+r)^n$; perciò si avrà $\frac{a\left((1+r)^n-1\right)}{r}=A(1+r)^n$; [1]

e dividendo i due membri per la frazione che moltiplica a,

verrà $$a=\frac{rA(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

Questa è dunque l' annualità cercata. Per calcolarla si calcolerà prima la parte $(1+r)^n$ per logaritmi, la quale indicandola con b, verrà $\log b\ \ n \log\,(1+r)$; e dopo trovata b si avrà $a=\frac{Abr}{b-1}$.

Se fosse data l'annualità, e si volesse conoscere il numero degli anni, si moltiplicheranno per r i due membri della relazione [1], e si avrà

$$a\times(1+r)^n - a = Ar\times(1+r)^n\,;$$

ed aggiungendo a a' due membri, e togliendone $Ar\times(1+r)^n$, verrà $a\times(1+r)^n - Ar\times(1+r)^n = a$, ovvero $(a-Ar)(1+r)^n = a$; e dividendo i due membri per $a-Ar$, e poi prendendo i logaritmi, verrà $n\times\log(1+r) = \log a - \log(a-Ar)$, e dividendo per $\log(1+r)$, si avrà infine $n = \dfrac{\log a + C.\log(a-Ar) - 10}{\log(1+r)}$.

Quando è data la rata a, e si cerca il numero n degli anni, e questo si trova eguale ad un intero che indichiamo con h accompagnato da una frazione che indichiamo con $\frac{p}{q}$, abbiamo detto (n.° 376) che la relazione $A = a(1+r)^n$ non è rigosamente vera. Allora, siccome il valore $a(1+r)^h$ non è uguale ad A, ma bisogna moltiplicarlo per $(1+r)^{\frac{p}{q}}$ per avere una grandezza eguale ad A, perchè $A = a(1+r)^{h+\frac{p}{q}} = a(1+r)^h(1+r)^{\frac{p}{q}}$; ciò vuol dire che dopo il tempo h col pagamento della rata a non si estingue esattamente il capitale A; quindi alla fine del tempo h non solo si deve pagare la rata a ma deve pagarsi bensì la differenza che passa fra il dato capitale A ed il valore espresso dalla formola $a(1+r)^h$. Da ciò si vede che la frazione $\frac{p}{q}$ del tempo data dalla relazione $A = a(1+r)^n$ è inutile, e solo è necessaria la parte intera h del tempo data dalla medesima relazione; mentre la parte fratta indica solamente che dopo il tempo h il capitale A non si estingue con il pagamento della rata a (*).

378. Dicesi pure annualità una somma costante che si pone ogni anno per farla fruttare in una *Cassa di risparmio*, calcolando gl'interessi sempre alla stessa ragione; e dopo n anni si cerca a quanto monta la somma di tutte le annualità cumulate con gli interessi composti delle medesime.

(*) Sarebbe facile dimostrare che il valore $a(1+r)^{h+\frac{p}{q}}$ è compreso fra i due valori $a(1+r)^h$ ed $a(1+r)^{h+1}$

Non tralasciamo far notare che negli Offizii delle *Casse di Risparmio* ove non si ha il tempo di calcolare con i logaritmi ciò che diviene un capitale unito agl'interessi composti dopo un dato tempo, si fa uso di alcune tavole ove i detti calcoli si trovano belli e fatti rispetto ai capitali, a contar da 1 a 100, e rispetto agl'interessi a contare dall'uno per 100 sino al 10 per 100, e per 50 anni. Queste tavole, con la corrispondente spiega del loro uso, si tovano nell'Algebra di Tommaso Mandoi stampata in Napoli il 1862.

Indicando con a l' annualità, e con r l'interesse dell' unità, la prima annualità dopo n anni diviene $a(1+r)^n$, la seconda dopo $n-1$ anni diviene $a(1+r)^{n-1}$, la terza diviene $a(1+2)^{n-3}$, e così di seguito; perciò la somma di tutte le annualità con i rispettivi interessi composti sarà

$$a(1+r)^n+a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}\ldots+a(1+r).$$

Or questa essendo la somma dei termini di una progressione geometrica che ha per primo ed ultimo termine $a(1+r)$, ed $a(1+r)^n$, e per ragione $1+r$, e per numero di termini n, indicando la detta somma con A, verrà

$$A=\frac{a(1+r)^n(1+r)-a(1+r)}{1+r-1}=\frac{a(1+r)\left((1+r)^n-1\right)}{r}.$$

Per calcolare A si calcolerà prima per logaritmi la parte $(1+r)^n$, perciò, indicando questa parte con b, si avrà

$$A=\frac{a(1+r)(b-1)}{r},$$

e quindi $\log A=\log a+\log(1+r)+\log(b-1)+\text{C}\log r-10.$

379. Il vitalizio è un contratto in cui una persona dà ad un altra un capitale, o un fondo che equivale ad un capitale; e chi riceve il capitale si obbliga di pagare a chi fa il vitalizio un' annualità per tutta la vita di questa persona; e la detta annualità deve esser tale che valga ad estinguere il capitale insieme con gli interessi composti da esso prodotti, tassati ad una certa ragione. Or se si conoscesse il numero degli anni di vita di chi fa il vitalizio, l' annualità dovrebbe calcolarsi in modo che dopo questo numero di anni si trovasse estinto il capitale insieme con gl'interessi che esso frutta; ma siccome non può conoscersi questo numero di anni, per avvicinarsi quanto più è possibile al vero, l'annualità si calcola sulla probabilità di vita che potrà avere la persona la quale fa il vitalizio. Gli anni probabili di vita si ricavano dalla *Tavola di mortalità*, la quale è formata su i dati di lunghe esperienze, ed in essa si trovano registrati gli anni di vita probabile che può avere un individuo di qualunque età. Si vede dunque che in questo contratto la persona che fa il vitalizio se vivesse di dippiù degli anni dati dalla tavola di mortalità, il contratto sarà vantaggioso per essa, e se vivesse meno, contratto sarà vantaggioso per la persona che ha ricevuto il capitale. Ecco qui appresso una tavola di mortalità della

probabilità di vita degli uomini in Napoli, estratto dall' *annuario del Signor Capocci*, facendo notare che la probabilità di vita delle donne è due anni dippiù.

Anni	probab. di vita	Anni	probab. di vita	Anni	probab. di vita	Anni	probab. di vita
0	21	20	35	40	23	60	12
1	37	21	34	41	23	61	12
2	42	22	33	42	22	62	11
3	44	23	32	43	22	63	11
4	45	24	32	44	21	64	10
5	45	25	32	45	21	65	10
6	44	26	31	46	20	66	9
7	43	27	31	47	19	67	9
8	43	28	31	48	18	68	8
9	42	29	30	49	18	69	8
10	41	30	29	50	18	70	8
11	41	31	28	51	18	72	7
12	40	32	28	52	17	74	6
13	39	33	27	53	16	78	5
14	38	34	26	54	15	81	4
15	37	35	26	55	15	84	4
16	37	36	25	56	14	93	3
17	36	37	24	57	13	95	2
18	35	38	24	58	13	110	1
19	35	39	23	59	12	111	0

380. Nel n.° [illegible] dicemmo che gl' interessi a scalare si contrattano in due modi.

Nel primo si conviene che il debitore dia al creditore sempre la stessa somma dopo eguali intervalli di tempo, p. e. ogni anno, finchè si estingua il debito: dunque quando è dato il tempo, si cerca la rata annuale da pagarsi, e viceversa quando è data la rata, si cerca il tempo che ci vuole per estinguere il debito. Si capisce poi che la rata da pagarsi deve esser maggiore dell'interesse, affinchè una parte di essa servisse a soddisfare l'interesse, e la rimanente parte servisse ad estinguere gradatamente il capitale. Dunque la rata che si paga non è che un' annualità come quella del n.° 377; perciò, se si denota con A il capitale dato ad interesse composto, e con r la tassa dell'unità, e con a la rata annuale da pagarsi dal debitore per estinguere il debito in n anni, per avere a bisogna ricorrere alla

relazione del n.° 377 la quale dà $a=\frac{Arb}{b-1}$, dopo essersi ricavato prima b dall'altra relazione $\log b=n\times\log(1+r)$. Se poi si cerca n, si avrà dalla relazione $n=\frac{\log a+C.\log(a+Ar)-10}{\log(1+r)}$.

381. La seconda maniera di contrattare gli interessi a scalare è quella in cui le rate eguali che paga il debitore sono parti aliquote del capitale, e servono ad estinguere il capitale e non già l'interesse, mentre l'interesse si soddisfa separatamente, anzi se le rate si pagano a mesi, ed il tempo per terminare il pagamento non è maggiore dell'anno, spesso si conviene di pagare tutti gl'interessi quando si paga l'ultima rata, e vi è una maniera facile di calcolarli.

Sia p. e. un capitale di 70 lire impiegato al $6\frac{0}{0}$, che si stabilisce di pagarsi dal debitore in rate eguali ogni mese, ed in 5 mesi; la rata di ciascun mese sarà di 14 lire. Ora volendo calcolare gli interessi, osserviamo che il debitore deve pagare gl'interessi di un mese su ciascuna delle seguenti somme.

$$70,\ 70-14,\ 70-2\times14,\ 70-3\times14,\ 70-4\times14=14;$$

perciò deve pagare gl'interessi di un mese sull'insieme di tutte le precedenti somme; Or poichè queste somme formano una progressione aritmetica, in cui i termini estremi sono il capitale 70, e la rata 14, ed il numero dei termini è 5; e poichè sappiamo che la somma dei termini di una progressione aritmetica è uguale alla semisomma dei termini estremi moltiplicata pel numero dei termini, perciò indicando con S la somma dei termini della nostra progressione, si avrà

$$S=\frac{70+14}{2}\times5=42\times5=210.$$

Dunque l'interesse da pagarsi dal creditore, è quello di un mese su di 210 ducati tassato al $6\frac{0}{0}$ l'anno; e siccome l'interesse per un anno si desume dalla proporzione $100:210::6:x$, che dà $x=12,60$, quello per un mese sarà 1,05.

E però, se da un debitore di 70 ducati dovesse farsi un *bono* con la condizione di restituire al creditore la detta somma in rate eguali mensili, ciascuna di 14 ducati, ed in 5 mesi; il bono dovrà farsi di ducati 71,05, atteso i ducati 1,05 d'interessi che devono pagarsi unitamente all'ultima rata, la quale perciò non sarà di ducati 14, ma di ducati 15,05.

382. Passiamo a risolvere qualche questione relativa al movimento della popolazione di uno Stato.

Supponiamo che la popolazione di uno Stato, la quale indichiamo con P, aumenti ogni anno di $\frac{1}{180}$: si domanda quale essa sarà dopo n anni.

È chiaro che dopo un anno essa diverrà

$P+\frac{P}{180}=\frac{P\times 180+P}{180}=\frac{P\times 181}{180}$; quindi si vede che per ottenere la popolazione di ciascun anno si deve moltiplicare quella dell'anno precedente per la frazione $\frac{181}{180}$; perciò la popolazione negli anni successivi sarà

$$P,\ P\times\frac{181}{181},\ P\times\left(\frac{181}{180}\right)^2,\ P\times\left(\frac{181}{180}\right)^3,\ldots P\times\left(\frac{181}{180}\right)^n,$$

Dunque se dinotiamo con x la popolazione dopo n anni, si avrà $x=P\left(\frac{181}{180}\right)^n$, la quale si calcola per logaritmi, e si avrà $\log x=\log P+n(\log 181-\log 180)$.

Sieno ora P e P' le popolazioni di due Stati, dove si suppone che P aumenti ogni anno di $\frac{1}{150}$, e P' di $\frac{1}{90}$; siccome la seconda popolazione cresce più rapidamente della prima, giungerà una volta a superare la prima: si domanda dopo quanto tempo diverranno eguali.

Indicando con n il numero cercato degli anni, dopo questo tempo la prima popolazione diverrà $P\times\left(\frac{151}{150}\right)^n$, e la seconda diverrà $P'\times\left(\frac{91}{90}\right)^n$; perciò si avrà $P\times\left(\frac{151}{150}\right)^n=P'\times\left(\frac{91}{90}\right)^n$; e prendendo i logaritmi dei due membri, si avrà

$\log P+n\times\log 151-n\times\log 150=\log P'+n\times\log 91-n\times\log 90$;

e togliendo da' due membri $\log P'$ ed $n\times\log 151$, ed aggiungendovi $n\times\log 150$, verrà

$$\log P-\log P'=n\times\log 91+n\times\log 150-n\times\log 90-n\times\log 151,$$

ovvero

$$\log P-\log P'=n\times(\log 91+\log 150-\log 90-\log 151);$$

e dividendo i due membri per la quantità chiusa in parentesi, verrà

$$n=\frac{\log P-\log P'}{\log 91+\log 150-\log 90-\log 151}$$

CAP. III.

APPROSSIMAZIONI NUMERICHE

383. Sotto questa rubrica comprenderemo due articoli.

Nel primo tratteremo del modo di abbreviare i calcoli, quando i numeri dati essendo esatti, il risultato deve avere un certo grado di approssimazione.

Nel secondo tratteremo del modo come conoscere qual sia il grado di approssimazione di un risultato provveniente da operazioni, che si eseguono su numeri approssimati; ed anche di vedere con qual grado di approssimazione debbansi prendere quei numeri che possono aversi con un'approssimazione illimitata, allorchè si deve operare su di essi per trovarne un altro che abbia un dato grado di approssimazione.

Metodo abbreviativo del calcolo quando i numeri dati sono esatti, ed il risultato deve avere un certo grado di approssimazione.

384. Per apprezzare l'utilità di questo articolo consideriamo un esempio di moltiplicazione, e supponiamo che debbasi moltiplicare un numero con sei decimali per un altro con sette decimali, e frattanto non si abbia bisogno nel prodotto che delle sole prime cinque decimali. La regola della moltiplicazione ordinaria darebbe il prodotto con tredici decimali, di cui le ultime otto sarebbero superflue. Ora l'oggetto di questo articolo è di esporre un metodo abbreviativo come evitare il lungo calcolo che dà il prodotto con tredici decimali, e di fare le sole operazioni necessarie per avere il prodotto con le prime cinque decimali che si desiderano.

Avvertimento. In tutte le operazioni che faremo si avrà in mira di trovare il risultato approssimato a meno di un'unità di un certo ordine, in *eccesso* o in *difetto*, chè se poi si richiedesse approssimato a meno di mezza unità di un dato ordine, bisognerebbe trovarlo con una cifra dippiù, ed indi disprezzare queste cifra, aumentando la precedente di un'unità, se quella disprezzata è maggiore o eguale a 5.

ADDIZIONE ABBREVIATA

385. *Se i numeri da addizionarsi non sono più di dieci, si addizionano sino alla cifra a dritta di quella che indica l' ordine di approssimazione, trascurando le altre di ordine inferiore; e si sopprime l' ultima cifra della somma, aumentando la precedente di un' unità.*

Se poi fossero più di dieci, si addizionano sino alla cifra che è due posti a dritta di quella indicante l' ordine di approssimazione; si sopprimono le due ultime cifre della somma e si aumenta di un' unità la cifra precedente.

Sieno, per esempio, da addizionarsi i numeri 3,1527, 0,312 514,271, 2,3051, 48,16, 0,567, 5,406, richiedendosi la somma approssimata a meno di un centesimo.

Si addizioneranno sino alla cifra de' millesimi, come si vede qui affianco, e si avrà per somma 584,173, dalla cui dritta supprimendo la cifra 3, ed aumentando la cifra precedente di una unità, la somma cercata sarà 584,18, approssimata a meno di 0,01.

3,152
0,312
524,271
2,305
48,16
0,567
5,406
584,173

Dim. Difatti, l' errore commesso su ciascun numero è minore di 0,001; e siccome i numeri dati non sono più di dieci, l' errore commesso su tutti è minore di $0{,}001 \times 10$ ossia di 0,01; perciò la somma è compresa fra 584,173 e $584{,}173 + 0{,}01$, e quindi fra 584,17 e 584,19; adunque la somma 584,18 sarà approssimata a meno di 0,01 in eccesso o in difetto.

Dopo ciò è facile capire che se i numeri dati fossero più di dieci, ma non più di cento, l' addizione dovrebbe farsi come si è detto nella seconda parte della regola.

SOTTRAZIONE ABBREVIATA

386. *Si esegue la sottrazione, trascurando ne' numeri dati le cifre di ordine inferiore a quello di approssimazione, prendendoli ambedue per eccesso, o per difetto.*

Sia il numero 85,73492 che voglia togliersi dall' altro 568,159386, richiedendosi il resto approssimato a meno di 0,001.

Si disprezzano ne' due numeri le cifre di ordine inferiore a' millesimi, prendendoli ambedue per eccesso o per difetto. Prendiamoli per difetto, ed eseguiamo la sottrazione, come quì affianco; otteremo così per resto 482,425 differente dal vero per meno di 0,001.

568,159
85,734
482,425

Dim. In effetti, la quantità che deve aggiungersi al resto per averlo esatto, è la differenza che passa fra due quantità ciascuna minore di 0,001; perciò con più ragione tale differenza è minore di 0,001.

Si vede poi che se la prima delle cifre disprezzate del numero maggiore supera la prima delle cifre disprezzate del numero minore, il risultato è in diffetto, e viceversa.

MOLTIPLICAZIONE ABBREVIATA.

387. *Si scrive sotto al moltiplicando il moltiplicatore con le sue cifre poste in ordine inverso, in modo che la cifra delle unità cada sotto la cifra del moltiplicando che è due posti a dritta di quella che indica l' ordine di approssimazione richiesto; poi si moltiplica il moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, tralasciando le cifre del moltiplicando che corrispondono a dritta di quella del moltiplicatore per la quale si esegue la moltiplicazione parziale, ed i prodotti parziali si scrivono l' uno sotto l' altro in modo che le cifre a dritta cadano in una medesima colonna; poi si addizionano, e la somma che si ottiene, dopo averne prima soppresse le due cifre a dritta ed aumentata di un'unità la cifra precedente, sarà il prodotto cercato.*

Sia il numero 74,13538695 da moltiplicarsi per 37,29481526, richiedendosi il prodotto che differisca dal vero per meno di 0,001.

Scriveremo sotto il moltiplicando il moltiplicatore con le sue cifre in ordine inverso, ed in modo che la cifra 7 delle unità cada sotto la cifra 8 del moltiplicando, la quale è due posti a dritta della cifra 5 che indica l' ordine di approssimazione, come qui affianco si vede. Poi cominceremo a moltiplicare il moltiplicando per la cifra 3 del moltiplicatore, trascurando le cifre del moltiplicando che corrispondono a dritta della cifra 3 del moltiplicatore, e si ottiene per prodotto parziale 222406158. Indi passeremo a moltiplicare il moltiplicando per la seguente ci-

74,13538695
6251 849273
222406158
51894766
1482706
667215
29652
5928
74
35
2764,86534

fra 7 del moltiplicatore, e scriveremo il prodotto 51894766 sotto il precedente, in modo che le cifre a dritta cadano in una medesima colonna. Similmente si proseguirà per ottenere gli altri prodotti parziali, ed infine si addizioneranno, e si avrà per somma 276486534; dalla cui dritta sopprimendo due cifre, che abbiamo segnate con un punto al di sopra, ed aumentando la precedente 5 di un' unità, e separando tre cifre decimali, otterremo il prodotto cercato, che sarà 2764,866, e differirà dal vero per meno di 0,001.

Dim. Considerando le cifre del moltiplicando sino alla cifra 8 de' centomilesimi che sta sulla cifra 7 delle unità del moltiplicatore, il numero 74,13538 che esso esprime, siccome si moltiplica per la cifra 7 la quale rappresenta unità, darà un prodotto che esprimerà centomilesimi, e differirà dal vero per meno di 7 centomilesimi, perchè tutte le cifre del moltiplicando che si trascurano e che sono a dritta della cifra 8, fanno meno di un centomilesimo (n.° 192). E non solo questo prodotto parziale, ma tutti gli altri prodotti parziali esprimeranno centomilesimi; in effetti, considerando p. e. il moltiplicando sino alla cifra 6 de' milionesimi, quantunque esso esprime milionesimi, cioè unità 10 volte minori di quelle che esprimeva nel prodotto precedente, pure dovendosi moltiplicare per la cifra 3 del moltiplicatore, la quale esprime unità dieci volte maggiori di quelle espresse dalle cifra 7, il prodotto 222406158 esprimerà anche centomilesimi come il precedente. Similmente ragionando si vede che tutti i prodotti parziali esprimeranno centomilesimi, e ciascuno differirà dal vero per meno di 0,00001 ripetuto tante volte quante unità sono nella rispettiva cifra del moltiplicatore; perciò la somma di tutti i prodotti parziali differirà dal vero per meno di 0,00001 ripetuto tante volte quante lo dinota la somma delle cifre del moltiplicatore le quali si sono impiegate, cioè per meno di $0,00001 \times (3+7+2+9+4+8+1+5)$.

Or siccome si disprezzano i prodotti parziali provenienti dalle cifre a sinistra della cifra 5 del moltiplicatore; per apprezzare che influenza essi hanno sull' errore del prodotto ottenuto, osserviamo che le unità di queste cifre trascurate fanno meno di un unità dell' ordine della cifra 5; supponiamo tutt' al più che equivalgano ad un unità di quest' ordine; allora invece di 5 si dovrebbe porre $5+1$; ma poichè quando

si moltiplica la cifra 7 a sinistra del moltiplicando per 5, il prodotto esprime centomilesimi come tutti gli altri prodotti parziali, se invece di 5 poniamo $5+1$, il prodotto si accrescerà di altri 7 centomilesimi. Adunque al prodotto ottenuto si debbono aggiungere altri 7 centomilesimi per la parte che si è trascurata a sinistra di 5, e si deve aumentare di un' unità la cifra 5 nella parentesi; da ciò segue che il detto prodotto peccherà per meno di un numero di centomilesimi indicato dalla somma che abbiamo scritta nella parentesi aumentata di 1 e della cifra 7 a sinistra del moltiplicando, cioè per meno di $0{,}00001\times(3+7+2+9+4+8+1+5+8)$, ossia di $0{,}00001\times47$, e con più ragione per meno di $0{,}00001\times100$, o di 0,001.

Dunque il prodotto vero sarà compreso tra 2764,86534 e 2764,86534+0,001, o fra 2764,865 e 2764,867; perciò prendendosi 2754,866 differirà dal vero per meno di 0,001, in *eccesso* o in *difetto* (*).

Avvertimento I. È da osservarsi che se le cifre a sinistra del moltiplicatore non escono al di fuori del moltiplicando deve sopprimersi nella parentesi la cifra che è uguale a quella a sinistra del moltiplicando più 1; e se le cifre a dritta del moltiplicando non escono fuori di quelle a dritta del moltiplicatore, si sopprime la prima cifra nella parentesi, perchè il primo prodotto parziale è esatto; ed in questo caso potrebbe anche avvenire che, oltre della detta cifra, potesse sopprimersi la seconda, la terza, ec.; e ciò succede quando le cifre del moltiplicando che trovansi sulle cifre a dritta del moltiplicatore sono zeri.

II. La regola che si è data esige che la somma delle cifre del moltiplicatore, le quali s' impiegano, aumentata della prima cifra del moltiplicando e di un'unità, non superi 100; ma

---

(*) L' errore e in eccesso quando la somma 47 delle cifre in parentesi aggiunta al numero 34 formato dalle cifre disprezzate a dritta del prodotto non supera 100: perchè ciò significa che l' errore è minore di 100 centomilesimi, ossia di 0,001: perciò aggiungendo 0 001 al numero 2764,865 si aggiunge troppo, e quindi il numero 2754,866 ottenuto secondo la regola pecca per eccesso. Se poi supera 100, per conoscere se l' errore sia in eccesso o in difetto, il prodotto dovrebbe calcolarsi con una cifra dippiù.

se superasse 100, allora si modificherà la regola nel seguente modo.

Si scrive la cifra delle unità del moltiplicatore in maniera che cada sotto la cifra del moltplicando la quale è tre posti a dritta di quella che indica l' ordine di approssimazione; e si disprezzano tre cifre a dritta del prodotto, aumentando di un' unità la cifra precedente.

Se poi la suddetta somma non supera 10, basterà scrivere la cifra delle unità del moltiplicare sotto la sifra del moltiplicando che è un posto a dritta di quella che indica l' ordine di approssimazione; e si disprezza una sola cifra a dritta del prodotto, aumentando di un' unità la precedente.

III. Se dopo scritto il moltiplicatore sotto del moltiplicando secondo la regola, sulla cifra a dritta del moltiplicatore non vi cadono cifre del moltiplicando, si aggiungeranno tanti zeri a dritta del moltiplicando finchè si giunga a coprire la cifra a dritta del moltiplicatore.

Così p e. se dovesse moltiplicarsi 189,57 per 346,25, richiedendosi il prodotto approssimato a meno di un' unità; dopo scritti i fattori secondo la regola, come qui affianco, si aggiungeranno due zeri a dritta del moltiplicando, affinchè vi corrispondesse un zero sulla cifra 3 a dritta del moltiplicatore; e poi si eseguirà la moltiplicazione, e si troverà per prodotto 65639 approssimato à meno di un' unità.

```
189,5700
   52643
--------
 5687100
  758280
  113742
    3790
     345
--------
 6563857
```

IV. Nella pratica si tralascia di scrivere le cifre del moltiplicando e del moltiplicatore che non s' impiegano nel calcolo. Così, nel primo esempio si tralascerà di scrivere 95 a dritta del moltiplicando, e 62 a sinistra del moltiplicatore.

DIVISIONE ABBREVIATA.

388. Primieramente osserviamo che la divisione di un decimale per un intero, ove il quoziente si voglia espresso in unità di un certo ordine, si può ridurre sempre a quella in cui si cerca il quoziente approssimato a meno di un' unità; e poi le unità espresse da questo quoziente si considerano come se fossero dell' ordine a cui appartiene l' approssimazione.

Così p. e. volendosi dividere 85,7932 per 564, e desiderandosi il quoziente espresso in millesimi, si trasferirà la virgola

a dritta della cifra 3 de' milesimi, e si dividerà il numero 85793,2 per 564 trovando il quoziente a meno di un'unità; poi le unità rappresentate dal quoziente 152 che si ottiene si considerano come millesimi, e si avrà il quoziente richiesto eguale a 0,152, approssimato a meno di 0,001. In effetti, il dividendo essendosi reso 1000 volte maggiore, il quoziente sarà pure 1000 volte maggiore; perciò dividendosi per 1000 si avrà il quoziente cercato.

Per la medesima ragione se volesse dividersi 59384,7 per 683, e si desiderasse il quoziente a meno di una decina; si trasferirà la virgola a dritta della cifra 8 delle decine, e si dividerà il numero 5938,47 per 683, trovando il quoziente a meno di un'unità, il quale sarà 8, e poi si considera come esprimente decine; perciò il quoziente cercato sarà 80, approssimato a meno di una decina. Ciò premesso, passiamo ad esporre il metodo abbreviativo per la divisione (*).

REGOLA PER ESEGUIRE LA DIVISIONE ABBREVIATA.

389. *Se il divisore è intero si trasferisce la virgola nel dividendo a dritta della cifra che corrisponde all' ordine di approssimazione, e si prendono sulla sinistra del divisore tante cifre, sicché il numero da esse espresso sia almeno eguale a 9 volte il numero delle cifre che deve avere il quoziente; queste cifre a sinistra del divisore formano* l'ultimo divisore; *poi a dritta di questo divisore si contano tante cifre quante ne deve avere il quoziente meno una, ed il numero formato dalle cifre dell' ultimo divisore e da quelle che si sono contate, trascurando le altre, sarà il* primo divisore; *indi si cancellano dalla dritta del dividendo, oltre de' decimali che vi si possono trovare, tante cifre quante ne sono nel divisore proposto a dritta dell' ultimo divisore, e le cifre che rimangono formano il* primo dividendo.

Poi si divide il primo dividendo pel primo divisore, e si ha la prima cifra del quoziente, ed il resto di questa divisione sarà il secondo dividendo, *e cancellando l' ultima cifra a dritta del primo divisore si ha il* secondo divisore. *Indi si divide il secondo dividendo pel secondo divisore, e si ottiene la seconda cifra del quo-*

(*) Abbiamo seguito il metodo che Serret espone nella sua aritmetica.

ziente; e similmente si proseguirà sino a che si saranno ottenute tutte le cifre del quoziente.

Se il divisore è decimale, la divisione si riduce prima a quella in cui il divisore è intero (*n°. 20*), *e poi vi si applica la regola data.*

Sia p. e. Il numero 139861362 5,82 da dividersi per 754896; richiedendosi il quoziente approssimato a meno di un' unità.

Siccome il quoziente deve avere quattro cifre, e 4 per 9 fa 36, l' ultimo divisore sarà 75 che è formato dalle due cifre a sinistra del divisore le quali formano un numero maggiore di 36; ed il primo divisore sarà 75489, perchè si forma dall' ultimo divisore e da tante altre cifre alla sua dritta quante ne tiene il quoziente meno una. Il primo dividendo poi sarà 139864, perchè si ottiene cancellando a dritta del dividendo, oltre delle cifre decimali che contiene, altre quattro cifre, cioè tante quante ne sono nel divisore proposto a dritta dell' ultimo divisore. Indi si esegue la divisione di 139864 per 75489, come si vede qui affianco, ed il resto 64375 sarà il secondo dividendo, ed il secondo divisore sarà il numero 7548, che si ottiene trascurando la cifra 9 a dritta del primo divisore; poi si esegue la seconda divisione, ed il resto 3991 sarà il terzo dividendo, ed il terzo divisore sarà 754, che si ottiene trascurando la cifra 8 a dritta del secondo divisore; indi si esegue la terza divisione, ed il resto 221 sarà l' ultimo dividendo, e l' ultimo divisore sarà 75. Infine si esegue l' ultima divisione, e si completa il quoziente, che sarà 1852, approssimato a meno di un' unità.

1398643625,82	754896
64375	1852
3991	
221	
71	

Per aiuto della memoria si pone un segno, p. e. un punto, sulle cifre del divisore, a misura che si trascurano.

Dim. Essendosi sottratti successivamente dal dividendo non già i prodotti del quoziente pel divisore, ma questi prodotti diminuiti ognuno di una certa quantità, e l' eccesso del dividendo su questi prodotti che abbiamo sottratti essendo il numero 713625,82, che si forma scrivendo a dritta dell' ultimo resto 71 le cifre cancellate alla dritta del dividendo; ne segue che il quoziente 1852 è il quoziente esatto che si otterrebbe dal dividere pel divisore proposto il dividendo proposto diminuito del resto 713625,82, ed aumentato de' prodotti di-

sprezzatti nella moltiplicazione del divisore pel quoziente 1852. Or se faremo vedere che tanto la somma di questi prodotti disprezzati, quanto il resto totale 713625,82 è minore del divisore proposto; con più ragione la loro differenza sarà minore del detto divisore; e quindi il numero 1852 è il quoziente esatto che si ha dal dividere pel divisore proposto il dividendo proposto, aumentato o diminuito di una quantità minore del divisore. Ecco perchè il detto quoziente differirà dal vero per meno di un' unità, per eccesso o per difetto.

Rimane dunque a provarsi che tanto il resto totale 713625,82 quanto la somma de' prodotti disprezzati, è minore del divisore proposto.

Per dimostrare al prima cosa osserviamo che il resto 71 essendo minore dell' ultimo divisore 75, e le cifre della parte intera cancellate a dritta del dividendo, le quali bisogna porre a dritta di 71 per avere il resto totale, essendo tante quante ne sono a dritta dell' ultimo divisore, il resto totale 713625,82 sarà minore del divisore 754896.

Per dimostrare la seconda cosa, osserviamo che moltiplicando il divisore per la prima cifra del quoziente non si è avuto riguardo alle cifre che seguono il primo divisore 75489; similmente nel moltiplicare il divisore per la seconda cifra del quoziente non si è tenuto conto delle cifre a dritta del secondo divisore 7548, e così di seguito. Da qui si vede che abbiamo operato come se si fosse trattato di moltiplicare col metodo abbreviativo il divisore proposto pel quoziente; ed in questa moltiplicazione la cifra 2 delle unità del quoziente cade sotto la cifra 5 dell' ultimo divisore 75, la quale occupa il posto delle decine di migliaia; perciò il prodotto ottenuto differirà dal vero (n.° 387) per meno di una decina di migliaia ripetuta tante volte quante lo dinota la somma delle cifre del quoziente; ma la somma di queste cifre, anche se fossero tutte 9, è minore dell' ultimo divisore 75; dunque l' errore proveniente dal moltiplicare il quoziente pel divisore è minore del numero rappresentato dall' ultimo divisore, cioè minore di 75 decine di migliaia; e quindi con più ragione minore del divisore 754896.

Da qui si vede che le cifre a dritta dell' ultimo divisore debbono essere tante quante sono quelle del quoziente meno una,

affinchè, rovesciato l' ordine delle cifre del quoziente, quella delle unità cada sotto la cifra a dritta del divisore, (*).

Avvertimento I. *Se il divisore avesse poco cifre da non potersi contare a dritta dell' ultimo divisore tante cifre quante ne ha il quoziente meno una, si aggiungeranno tanti zeri a dritta del divisore finchè abbia le cifre richieste, e si moltiplicherà il dividendo per 10, 100, ec. secondo che si sono aggiunti uno, due, ec. zeri; ed indi si eseguirà la divisione.*

Ovvero, *si eseguirà la divisione ordinaria finchè le cifre da trovarsi nel quoziente sieno una dippiù di quante ne sono a dritta dell' ultimo divisore, e le rimanenti si troveranno col metodo abbreviativo.*

Ecco qui appresso due corrispondenti esempi.

Sia da dividersi 87429,5383156 per 342,75 desiderandosi il quoziente a meno di 0,0001. Primieramente la divisione si riduce a quella di 8742953,83156 per 34275; e siccome l'approssimazione si vuole sino a' diecimilesimi, si trasferisce nel dividendo la virgola a dritta della cifra de' diecimilesimi, e si dividerà 87429538315,6 per 34275 cercando il quoziente approssimato per meno di un' unità, e dopo trovato, siccome esso risulta 10000 volte maggiore, si dividerà per 10000 con separarne quattro cifre decimali; e si avrà il quoziente cercato a meno di 0,0001.

(*) Facciamo osservare che siccome fra l' ultima cifra del primo dividendo parziale e la virgola vi sono tante cifre quante ne ha il quoziente meno una; e siccome si disprezzano a sinistra della virgola nel dividendo tante cifre quante ne sono a dritta dell' ultimo divisore, ne segue che se a dritta dell' ultimo divisore vi sono giusto tante cifre quante ne ha il quoziente meno una, allora il primo dividendo della divisione abbreviata è lo stesso che il primo dividendo della divisione ordinaria; se poi ve ne sono dippiù, sarà di minor numero di cifre, e sarà di tante cifre di meno, di quanto è l' eccesso delle cifre del divisore proposto su quelle del primo divisore della divisione abbreviata. Epperò il primo dividendo ed il primo divisore della divisione abbreviata saranno mancanti del medesimo numero di cifre rispetto a quelle del primo dividendo e del divisione della divisione ordinaria.

Or poichè il quoziente deve avere 7 cifre, e non si possono contare sei cifre a dritta dell'ultimo divisore 342, si suppliranno le cifre mancanti con quattro zeri, e si trasferirà la virgola verso dritta nel dividendo di quattro posti; quindi l'operazione si riduce a dividere 874295383156000 per 342750000. E cancellando secondo la regola sei cifre dalla dritta del dividendo, si avrà il primo dividendo parziale della divisione abbreviata, il quale sarà 874295383; ed eseguendo la divisione, come si vede quì affianco, si avrà per quoziente 2550825, da cui separando quattro decimali, si otterrà il quoziente richiesto approssimato a meno di 0,0001, che sarà 255,0825.

```
 874295383156000 |342750000
 188795383       |2550825
  17420383
    282883
      8683
      1829
       119
```

Sia per secondo esempio da dividersi 517342382,3418 per 42356, richiedendosi il quoziente approssimato a meno di un centesimo.

Si trasferisce la virgola nel dividendo a dritta della cifra dei centesimi, e dovrà dividersi 51734238234,18 per 42356, e poi dal quoziente si separeranno due cifre decimali. Or siccome le cifre del quoziente sono sette, ed a dritta dell'ultimo divisore 423 non si possono contare sei cifre, cominceremo con eseguire la divisione ordinaria fino a che le cifre da trovarsi sieno tre, cioè una dippiù di quante ne sono a dritta dell' ultimo divisore, e poi si continuerà la divisione col metodo abbreviato, come si vede qui affianco, e si otterrà per quoziente 12214,14, (*).

```
 51734238234,18 | 42356
 93782          |12214,14
 90703
  59918
 175622
   6198
   1963
    271
```

(*) Allorchè si opera in questo modo per trovare il quoziente può alle volte accadere, come avviene nel presente esempio, che le cifre dell' ultimo divisore invece di tre si riducono a due. Difatti, in questo esempio dopo essersi trovate le tre prime cifre del quoziente, immaginando abbassate a dritta del resto 5991 le rimanenti cifre del divendo, si avrà il resto totale 59918234,18 da

11. Può alle volte succedere che le cifre del resto sono eguali alle cifre del divisore parziale, meno quella a dritta che deve essere sempre minore di quella a dritta del divisore parziale, altrimenti il resto non sarebbe minore del detto divisore; allora sopprimendo la cifra a dritta del divisore per avere il nuovo divisore, il resto conterrà il nuovo divisore 10 volte, e la cifra del quoziente equivale a 10, cioè invece di essere una saranno due. In tal caso si ottiene il quoziente aumentando di un' unità la cifra precedente, e le altre a dritta saranno tutte zeri.

Così p. e., se dovesse dividersi 923240,1596 per 2637,85, richiedendosi il quoziente approssimato sino a' decimi. Primieramente la divisione si riduce a quella di 92324015,96 per 263785, e poi vi si applica il metodo abbreviativo, come si vede quì affianco. Or quando si giunge al terzo dividendo parziale 26373, esso contiene 10 volte il terzo divisore 2637; perciò la cifra del quoziente equivale a 10, cioè saranno due cifre invece di una, ma consideriamo per poco il 10 come una sola cifra, scrivendolo in parentesi, e moltiplichiamo il divisore per 10, si avrà per prodotto 26370 che sarà formato dalle stesse cifre del dividendo meno quella a dritta che è zero invece di 3; perciò tolto il prodotto dal dividendo, il resto 3 sarà di una sola cifra; questo resto dunque è sempre minore del divisore parziale, il quale tiene almeno due cifre, perchè l' ultimo divisore ne ha almeno due; perciò tutte le cifre che rimangono a scriversi nel quoziente sono zeri, e nel nostro esempio il quoziente sarà 3500; ma siccome esprime decimi, sarà 350,0.

923240159,6	263785
131885	34(10,0
26373	
3	

La dimostrazione data per il caso generale, poggiando sulla considerazione che l'ultimo divisore è maggiore della somma del-

---

dividersi per 42356; perciò si può considerare come se la divisione allora cominciasse per trovare le rimanenti quattro cifre del quoziente; e siccome il prodotto di 4 per 9 fa 36 che è minore di 42, sarà 42 l' ultimo divisore, alla dritta di cui potendosi contare tre cifre, cioè tante quante ne ha il quoziente meno una, la divisione abbreviata si comincerà non dopo abbassata la quarta, ma dopo abbassata la terza cifra 8, senza che più si abbassino altre cifre del dividendo.

le cifre del quoziente anche se queste fossero tutte 9, vale pure in questo caso; solamente potrebbe esservi incertezza nel caso singolare in cui si dovesse scrivere 10 per ultima cifra del quoziente, e le precedenti fossero tutte 9, e l' ultimo divisore fosse giusto eguale a 9 volte il numero delle cifre del quoziente; ma allora il quoziente riducendosi all' unità seguita da zeri, si può tosto conoscere se il 10 che si è ottenuto per ultima cifra fosse troppo grande e bisognasse diminuirlo di una unità; perchè il quoziente si può subito moltiplicare pel divisore con la sola aggiunzione di zeri a dritta di questo, e si vede se dà un prodotto maggiore o minore del dividendo.

CARCOLO DE' NUMERI APPROSSIMATI.

390. Abbiamo parlato sin ora di numeri approssimati a meno di un'unità dall'ordine della cifra a dritta; ma alle volte si hanno numeri approssimati a meno di un' unità di un certo ordine, i quali tengono anche cifre di ordine inferiore a quello che indica l'approssimazione. In questi numeri non si può contare sulla esattezza delle cifre di ordine inferiore, perciò esse debbono disprezzarsi. Così p. e. se il numero 81,572916 fosse approssimato a meno di 0,001, conviene disprezzare le tre cifre di ordine inferiore ai millesimi, ed il numero 81,572 che ne risulta sarà anche approssimato a meno di 0,001, ossia per meno di un' unità del suo infimo ordine, se l' errore del numero dato è in eccesso. Difatti, siccome le cifre disprezzate rappresentano un numero minore di 0,001, si è venuto a togliere meno di 0,001 dal numero proposto il quale superando il vero per meno di 0,001, il resto 81,572 anche diferirà dal vero per meno di 0,001.

Se poi l' errore del numero proposto fosse per difetto, supponiamo che sia di 0,004; allora venendosi a disprezzare 0,0009, ed altre cifre di ordine inferiore, il numero 81,572 che ne risulta si troverà mancante di 13 diecimilesimi a un di presso; perciò sarà erroneo per più di 0,001, ma per meno di 0,002; quindi se si aumenta di un' unità la cifra 2 dei millesimi, il numero 81,573 che ne risulta sarà erroneo per eccesso, per meno di 0,001.

Dunque quando si conosce che l' errore è in difetto bisogna disprezzare le cifre di ordine inferiore a quello che indica l' approssimazione, ed aumentare l' ultima cifra di un'unità.

Quando poi non si conosce il senso dell' errore, allora disprezzando le cifre di ordine inferiore ai millesimi, il numero 81,572 che ne risulta può essere erroneo per meno di 0,001, ed anche per meno di 0,002 se l' errore è per difetto; e però se si vuole essere sicuro che il numero risultante, dopo di averlo sbarazzato dalle cifre inesatte che stavano alla sua dritta, è erroneo per meno di un' unità dell' infimo ordine, conviene disprezzare anche la cifra dei millesimi, ed aumentare la precedente di un' unità; e così il numero 81,58 che si ottiene sarà erroneo per eccesso, a meno di 0,01.

Passiamo ora all' addizione ed alla sottrazione dei numeri approssimati.

ADDIZIONE DEI NUMERI APPROSSIMATI.

391. Sieno ora da addizionarsi più numeri approssimati a meno di un'unità del loro infimo ordine; e vogliasi conoscere il grado di approssimazione della somma:

Se i numeri dati non sono più di dieci ed hanno lo stesso grado di approssimazione, che supponiamo essere in tutti nel medesimo senso, si addizionano, e si disprezza l' ultima cifra a dritta della somma aumentando la precedente di un'unità se il senso dell' errore è per difetto; ed il risultato che si ottiene sarà erroneo per meno di un'unità del suo infimo ordine.

Se poi sono più di dieci, la regola è la stessa, col divario di doversi disprezzare due cifre a dritta della somma.

Sieno p. e. da addizionarsi i numeri scritti qui affianco che sono erronei tutti nel medesimo senso per meno di un millesimo. Eseguendo l'addizione si troverà per somma 59,374, di cui si disprezza la cifra a dritta, e la somma cercata approssimata a meno di 0,01 sarà 59,37 se gli errori sono per eccesso; ma se sono per difetto, bisognerà aumentare la cifra precedente di un unità, e la somma cercata sarà 59,38 erronea per meno di 0,01.

$$\begin{array}{r} 32{,}653 \\ 5{,}472 \\ 21{,}085 \\ 0{,}164 \\ \hline 59{,}374 \end{array}$$

Dim. In effetti, l' errore di ciascun numero essendo minore di 0,001, ed i numeri non essendo più di dieci, l' errore sarà minore di $0{,}001 \times 10$, ossia minore di 0,01, in *più* o in *meno*, secondo che i numeri dati sono approssimati per eccesso o per difetto. Perciò nel primo caso la somma cercata sa-

rà compresa fra 59,374—0,01 e 59,374 e con più ragione fra 59,36 e 59,38; quindi 59,37 differisce dal vero per meno di 0,01.

Nel secondo caso la somma cercata è compresa fra 59,374, e 59,374+0,01, e con più ragione fra 59,37 e 59,39, perciò 59,38 differirà dal vero per meno di 0,01.

392. Supponiamo che nei numeri dati non si conoscesse il senso dell' errore, in tal caso la somma 59,374 può essere erronea in eccesso o in difetto per meno di 0,01; perciò la somma cercata sarà compresa fra 59,374—0.01 e 59,374+0,01, e con più ragione fra 59,36 e 59,39; dunque si può prendere 59,37 ovvero 59,38, e si peccherà per meno di 0,02.

Ma si può giungere ad un maggior grado di approssimazione, osservando che i numeri dati essendo quattro, l' errore sarà minore di 0,001 preso quattro volte, cioè di 0,004, in eccesso o in difetto; perciò la somma cercata è compresa fra 59,374—0,004 e 59,374+0,004, ossia fra 59,370 e 59,378; dunque 59,37 sarà erroneo per meno di 0,01, e sarà in difetto.

393. Se i numeri dati non hanno le cifre a dritta del medesimo ordine, come sono i numeri 5,72, 21,083, 8,59242, 0,2756 ove il numero 5,72 ha la cifra a dritta di ordine superiore a quello della cifra a dritta degli altri numeri, si disprezzano in questi numeri le cifre di ordine inferiore ai centesimi, ed avranno ad addizionarsi i numeri 5,72, 21,08, 8,59, 0,27 approssimati tutti per meno di 0,01; perciò la questione si riduce al caso precedente.

394. Se i numeri dati avessero un numero illimitato di cifre, e se ne volesse la somma con un certo grado di approssimazione, p. e. che differisca dal vero per meno di 0,001; si addizioneranno sino alla cifra dei diecimilesimi inclusivamente, disprezzando le cifre di ordine inferiore; poi dalla somma si sopprime la cifra dei diecimilesimi e la precedente si aumenta di un'unità, perchè i numeri che si addizionano son approssimati per difetto.

SOTTRAZIONE DEI NUMERI APPROSSIMATI.

395. *Se i numeri dati hanno le cifre a dritta del medesimo ordine, si esegue la sottrazione, ed il resto peccherà per meno di un'unità dell' infimo ordine dei numeri dati, se gli errori sono nel medesimo senso; se poi non si conosce il senso dell'errore il resto può risultare erroneo per meno di due unità dell' infimo ordine.*

La ragione è quella stessa addotta nel n.° 386.

Se poi i numeri dati non hanno le cifre a dritta del medesimo ordine, in quello che ha le cifre di ordine inferiore si disprezzano queste cifre, e poi si esegue la sottrazione, la quale perciò si riduce al caso precedente.

396. Per la moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza, ed estrazione della radice di un numero approssimato. Faremo uso degli errori relativi, le cui proprietà esporremo quì appresso ma per ben intendere talune di esse, conviene far vedere come il prodotto formato da due fattori, ciascuno de' quali è una differenza accennata e non eseguita fra due quantità, si componga per mezzo di queste quantità. Per semplicità scriveremo il prodotto di due quantità a e b senza porre il segno fra esse, cioè invece di scrivere $a\times b$, scriveremo ab.

Sia in primo luogo da moltiplicarsi $a-b$ per c; dico che il prodotto sarà $ac-bc$. In effetti, se moltiplichiamo solo a per c, il prodotto ac sarà maggiore del vero; perchè a doveva prima diminuirsi di b, e poi il resto doveva moltiplicarsi per c; quindi nel prodotto ac vi è dippiù b ripetuto c volte, cioè vi è dippiù bc; perciò togliendo bc da ac si avrà il prodotto vero, che sarà $ac-bc$.

Sia ora $a-b$ da moltiplicarsi per $c-d$; dico che il prodotto sarà $ac-bc-ad+bd$.

In effetti, moltiplicando primieramente $a-b$ per c, abbiamo veduto che il prodotto sarà $ac-bc$; ma siccome non dovevamo moltiplicare per c, ma per c diminuito di d, non avendo diminuito c di d, nel prodotto vi sarà dippiù $a-b$ ripetuto d volte, cioè $ad-bd$; dunque il vero prodotto sarà $ac-bc$ diminuito di $ad-bd$. Ora per togliere da $ac-bc$ la quantità $ad-bd$, toglieremo prima ad, ed il resto $ac-bc-ad$ sarà minore del vero, perchè si è tolta tutta ad senza prima diminuirla di bd; essendosi dunque tolta dippiù la quantità bd, il resto sarà minore del vero di bd; dunque aggiungendo bd al resto $ac-bc-ad$, si avrà il resto vero che sarà $ab-bc-ad+bd$. Perciò il prodotto di $a-c$ per $b-d$ sarà $ac-bc-ad+bd$.

ERRORI RELATIVI.

397. La differenza che passa fra un numero esatto ed un altro numero ad esso approssimato dicesi *errore assoluto* del numero approssimato. Dicesi poi *errore relativo* il rapporto dell'errore assoluto al valore esatto del numero.

Segue da questa definizione che, *se si moltiplica l' errore relativo pel numero esatto, il prodotto sarà eguale all'errore assoluto.*

398. L'errore assoluto di un numero approssimato non è sufficiente a farne conoscere il grado di approssimazione, ma è l'errore relativo che misura questo grado. In effetti, se si hanno due numeri approssimati per difetto, i quali hanno lo stesso errore assoluto, p. e. di 3 unità, ed uno dei numeri sia molto più grande dell' altro, come sono i numeri 957 e 15, che perciò i numeri esatti sono 960 e 18; l' errore di 3 unità sul numero 957 rispetto al numero esatto 960 è molto picciolo, perchè è i $\frac{3}{960}$, ossia $\frac{1}{320}$ del numero esatto; mentre l' errore di 3 unità sul numero 15 è considerevole rispetto al numero esatto 18, essendo $\frac{3}{18}$ o $\frac{1}{6}$ del numero esatto.

Dunque l' errore di un numero approssimato rispetto al numero esatto viene determinato dal rapporto fra l' errore assoluto ed il numero esatto, ossia dall' errore relativo del numero. Ecco perchè l' errore relativo di un numero approssimato è quello che misura il suo grado di approssimazione.

399. Ciò premesso, passiamo a stabilire le seguenti proposizioni.

I. *In ogni numero approssimato, l'errore relativo è minore dell'unità divisa per la prima cifra significativa seguita da tanti zeri quante cifre esatte vi sono dopo di essa cifra.*

Supponiamo che l'errore sia per difetto, e che le cifre sieno esatte sino a quella de' millesimi inclusivamente. Possiamo rappresentare la parte esatta del numero con $\frac{a}{1000}$, indicando con a il numero intero formato dalle cifre esatte a sinistra del numero approssimato, astrazion fatta dalla virgola. Ora è chiaro che le cifre del numero approssimato per difetto essendo esatte sino quella dei millesimi inclusiva, il numero rappresentato da queste cifre esatte differisce dal vero per meno di

0,001; perciò l' errore assoluto del numero sarà minore 0,001 (n.° 192), quindi l'errore relativo sarà minore di $\frac{1}{1000} : \frac{a}{1000}$, ossia di $\frac{1}{a}$; perchè il dividendo essendo maggiore dell' errore assoluto, ed il divisore essendo minore del numero esatto, il quoziente $\frac{1}{a}$ per doppia ragione sarà maggiore dell'errore relativo.

Se adesso supponiamo che le cifre a dritta della prima significativa fossero zeri, con più ragione il quoziente sarà maggiore dell' errore relativo. E però l'errore relativo è minore dell'unità divisa per la prima cifra del numero approssimato seguìta da tanti zeri quanto sono le cifre esatte dopo la detta cifra.

Sia p. e. il numero approssimato 825,64357 in cui supponiamo essere esatte le sei prime cifre; l'errore relativo sarà minore di $\frac{1}{825643}$, e con più ragione di $\frac{1}{800000}$, ossia di $\frac{1}{8.10^5}$.

Alle volte si sostituisce l' unità alla prima cifra, e l' errore relativo con più ragione sarà minore dell' unità divisa per la potenza di 10 indicata dal numero delle cifre esatte dopo la prima. Così nel precedente esempio l' errore relativo sarà minore di $\frac{1}{10^5}$.

Se poi l'errore è in eccesso, il che nell' esempio precedente vuol dire che le sei prime cifre sono esatte meno l' ultima a dritta la quale deve tenere un' unità dippiù della vera; allora se invece di questa cifra ne sostituissimo un' altra che avesse un' unità di meno, la proposizione, per quel che si è dimostrato, è vera; dunque con più ragione è vera quando essa cifra viene supplita da zero, e con maggior ragione quando tutte le altre cifre precedenti sino alla prima significativa esclusa, sono supplite da zeri.

400. *Avvertimento*. La proposizione cessa di esser vera quando il numero approssimato avesse per sola cifra significativa l' ultima a dritta, e questa fosse l' unità, e peccasse per eccesso.

Difatti, se per esempio il numero esatto è 0,0001, e si prende per numero approssimato 0,001, l' errore assoluto è 0,0009, e quindi il relativo è $\frac{0,0009}{0,0001} = 9$. Frattanto nulla importa che in questo caso singolare la proposizione non è vera, perchè

le operazioni di calcolo che debbono farsi su di un numero approssimato il quale tiene per sola cifra significativa a dritta l'unità, combinato con un altro numero, si eseguono immediatamente, ed è facile valutare il grado di approssimazione.

Se poi la detta cifra significatica non fosse l' unità, l'errore relativo, per quel che si è detto nel numero precedente, sarà minore dell' unità divisa per la detta cifra diminuita di un' unità. Così per esempio, se il numero approssimato fosse 0,007 per eccesso, il suo errore relativo sarà minore di $^1/_6$.

401. II. *Se l' errore relativo di un numero approssimato è minore dell' unità divisa per una cifra seguìta da zeri, si potrà contare sull' esattezza di tante cifre del numero approssimato, cominciando dalla prima significativa, quanti sono i detti zeri, o su di una cifra dippiù; secondo che la cifra a sinistra de' zeri è minore o eguale, ovvero maggiore della prima cifra a sinistra del numero approssimato.*

Sia 638,9257 il numero approssimato, ed il suo errore relativo sia minore di $\frac{1}{80000}$. Siccome la cifra 8 del denominatore dell' errore relativo è maggiore della prima cifra 6 del numero approssimato, moltiplichiamo la frazione $\frac{1}{80000}$ pel numero 638,92 espresso dalle prime cinque cifre del numero approssimato, cioè da tante cifre, a contar dalla prima significativa, quante ne sono nel denominatore della detta frazione, e si avrà un prodotto minore di un' unità dell' ordine dell' ultima delle dette cinque cifre, cioè minore di 0,01.

Difatti, se questa cifra esprimesse unità semplici, il prodotto sarebbe minore di un' unità semplice; e se esprimesse decimi, il prodotto sarebbe dieci volte minore, e quindi minore di un decimo; e così via discorrendo. Or se la prima delle sudette cinque cifre si aumenti di un' unità, e le altre si suppongano eguali a zero, il numero 70000 che ne risulta sarà maggiore del numero esatto; ed il prodotto di esso per la frazione $\frac{1}{80000}$ tutt' al più può venire eguale ad 0,01, nel caso che la prima cifra significativa del numero approssimato è minore di una sola unità della cifra 8 del denominatore dell' errore relativo; ma questo prodotto essendo sempre mag-

giore dell' errore assoluto, perchè si moltiplica un numero maggiore dell' errore relativo per un altro maggiore del numero esatto (n.° 397), ne segue che l' errore assoluto sarà minore di 0,01, cioè minore di un' unità dell' ordine dell' ultima delle suddette cinque cifre: perciò queste cifre sono esatte.

Se poi la prima cifra 8 del denominatore delle frazione $\frac{1}{80000}$ fosse eguale o minore della prima cifra significativa dal numero approssimato, come avviene ne' numeri approssimati 851,7452 e 951,7452, si potrà contare sull' esattezza di tante cifre quanti sono i soli zeri del detto denominatore. La dimostrazione procede dello stesso modo, con la sola differenza che l' errore relativo dovrà moltiplicarsi per le sole quattro prime cifre del numero approssimato, cominciando dalla prima significativa; e l' errore assoluto risultando allora minore di 0,1, saranno perciò esatte le prime quattro cifre.

402. *Avvertimento.* Essendosi detto (n.° 399) che l' errore relativo di un numero approssimato p. e. del numero 825,64957, minore di $\frac{1}{8.10^5}$; questa frazione suole chiamarsi *limite superiore* dell' errore relativo. Qui dunque non si deve annettere alla parola *limite* quella stessa idea che vi fu annessa nel n.° 210.

403. III. *L'errore relativo del prodotto di due fattori approssimati è uguale alla somma degli errori relativi de' fattori, aumentata o diminuita del prodotto de' medesimi errori; secondo che sono approssimati ambedue per eccesso, o per difetto.*

Sieno a e b i fattori esatti, e x ed y i rispettivi errori assoluti; i fattori approssimati per difetto saranno $a-x$ e $b-y$, e quelli approssimati per eccesso saranno $a+x$ e $b+y$.

Supponendoli approssimati per difetto il loro prodotto sarà $ab-bx-ay+xy$ (n.° 396), che togliendolo dal prodotto esatto ab, si avrà l' errore assoluto $bx+ay-xy$ (n.° 347); e quindi l' errore relativo sarà $\frac{bx+ay-xy}{ab}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{xy}{ab}$.

Supponendoli approssimati per eccesso, il loro prodotto sarà $ab+bx+ay+xy$, e l' errore assoluto sarà $bx+ay+xy$ e quindi il relativo sarà $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{xy}{ab}$.

Ora, tanto nel primo quanto nel secondo caso, le due pri-

me frazioni che compongono l' errore relativo del prodotto, non essendo altro che gli errori relativi de' fattori, e la terza essendo il prodotto de' medesimi errori, sarà vera la proposizione enunciata.

404. IV. *L'errore relativo del prodotto di due fattori, uno approssimato per eccesso e l' altro per difetto, è uguale alla differenza degli errori relativi de' fattori, aumentata o diminuita del prodotto de' medesimi errori.*

Sieno a e b i fattori esatti, ed $a+x$ e $b-y$ quelli approssimati; il loro prodotto sarà $ab+bx-ay-xy$; e l' errore assoluto sarà $bx-ay-xy$, e quindi il relativo sarà $\frac{bx-ay-xy}{ab}$ $=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{xy}{ab}$. Or se l'errore relativo del fattore di eccesso è minore dell' errore relativo del fattore di difetto, quando si toglie dal primo il secondo, il resto risulterà negativo; e siccome poi si deve anche togliere dal resto il prodotto degli errori relativi de' fattori, ciò equivale a sommare questo prodotto col resto; quindi in questo caso l' errore relativo del prodotto è uguale alla differenza degli errori relativi de' fattori aumentata del prodotto de' medesimi errori; altrimenti viene eguale alla differenza de' detti errori diminuita del prodotto dei medesimi errori.

405. V. *L' errore relativo del prodotto di due fattori, uno esatto e l' altro approssimato, è uguale a quello del fattore approssimato.*

Indichiamo con $a+x$ o con $a-x$ il fattore approssimato, secondo che è per eccesso o per difetto, essendo x l' errore assoluto; e sia b il fattore esatto. Il prodotto sarà $ab+bx$ nel primo caso, ed $ab-bx$ nel secondo; ed il suo errore assoluto nell' uno e nell' altro caso sarà bx; e quindi il relativo sarà $\frac{bx}{ab}=\frac{x}{a}$, cioè pareggia quello del fattore approssimato.

406. Nelle applicazioni il prodotto degli errori relativi dei fattori è una quantità trascurabile rispetto agli errori de' fattori, come fra breve vedremo; perciò le proposizioni enunciate di sopra si comprendono in quest' unico enunciato.

VI. *L' errore relativo del prodotto di due fattori approssimati è sensibilmente eguale alla somma o alla differenza degli errori relativi de' fattori, secondo che gli errori sono nel medesimo senso, o in senso contrario.*

407. Questa proposizione si estende ad un numero qualunque di fattori, e si dirà:

VII. *L'errore relativo del prodotto di più fattori approssimati nel medesimo senso è sensibilmente eguale alla somma degli errori relativi de' fattori; e se sono approssimati parte in un senso e parte in senso contrario, sarà sensibilmente eguale alla differenza fra la somma degli errori de' fattori che sono approssimati in un senso, e la somma di quelli de' fattori che sono approssimati in senso contrario.*

In effetti, supponendo che i fattori sieno tre, e sieno erronei nel medesimo senso. Moltiplicando il prodotto de' due primi fattori pel terzo, l'errore relativo del prodotto sarà sensibilmente eguale alla somma degli errori relativi del moltiplicando e del moltiplicatore; ma l'errore relativo del moltiplicando è sensibilmente eguale alla somma degli errori relativi de' due primi fattori; perciò l'errore relativo del prodotto di tre fattori è sensibilmente eguale alla somma degli errori relativi de' fattori. Similmente si estende la dimostrazione a più di tre fattori.

Dopo ciò è facile capire che quando gli errori sono parte in un senso e parte in un altro, l'errore relativo del prodotto sarà come si è detto nella proposizione enunciata.

408. Corollari. — I. *L'errore relativo della potenza di un numero approssimato è sensibilmente eguale all'errore relativo del numero moltiplicato per l'esponente della potenza.*

II. *L'errore relativo della radice di un numero approssimato è sensibilmente eguale all'errore relativo del numero diviso per l'indice della radice.*

Adunque l'errore relativo del quadrato è doppio di quello della radice, e quello della radice è metà di quello del quadrato.

III. *L'errore relativo del quoziente è sensibilmente eguale alla differenza, o la somma di quelli del dividendo e del divisore; secondo che questi due numeri sono approssimati nel medesimo senso, o in senso contrario.*

Ciò perchè il dividendo è un prodotto i cui fattori sono il quoziente ed il divisore, e quindi (n.i 142 e 143) sarà vera la proposizione enunciata.

409. Prima di passare alla moltiplicazione de' numeri approssimati facciamo osservare che, se gli errori relativi dei fattori hanno le potenze di 10 con diverso esponente, suole

ritenersi come errore relativo del prodotto solo quello con la minor potenza di 10, disprezzando l'altro. Così p. e. se gli errori relativi de' fattori fossero $\frac{1}{4.10^3}$ ed $\frac{1}{7.10^5}$, è sufficiente considerare come errore relativo del prodotto il primo di essi, che è affetto dalla minor potenza di 10. Ma noi aggiungiamo non essere soddisfacente questa regola quando gli esponenti di 10 differiscono di una sola unità; in effetti, se il moltiplicatore della minor potenza di 10 fosse 9, ed 1 quello della maggior potenza, come avviene negli errori $\frac{1}{9.10^3}$ ed $\frac{1}{1.10^4}$, non converrebbe trascurare il secondo errore, il quale raddoppierebbe le unità del più alto ordine del primo. E però in questo caso terremo la seguente regola.

Si ritiene come errore relativo del prodotto quello con la minor potenza di 10. ma al numero che moltiplica questa potenza conviene sostituire l'intero che si ha dal dividere il prodotto de' numeri che moltiplicano le due potenze di 10 pel numero che moltiplica la maggior potenza aumentato di un'unità. E se il numero che moltiplica la minor potenza è uguale all'unità, si sostituisce 9 all'unità, e si diminuisce di uno l'esponente di 10.

Così p. e. sieno $\frac{1}{5.10^3}$ ed $\frac{1}{7.10^4}$ gli errori relativi de'fattori. Si prenderà $\frac{1}{4.10^3}$ per errore relativo del prodotto, cioè si prende quello con la minor potenza di 10; ma al moltiplicatore 5 si sostituisce 4, ossia l'intero che si ricava dal dividere il prodotto 5×7 pel numero 8 che si ottiene aumentando di un'unità il moltiplicatore 7 della maggior potenza di 10. Difatti, l'errore relativo del prodotto è $\frac{1}{5.10^3}+\frac{1}{7.10^4}=\frac{70+5}{5.7.10^4}$; e se a 70 aggiungiamo 10 invece di 5, l'errore relativo sarà minore di $\frac{80}{5.7.10^4}$, o di $\frac{1}{\frac{5.7}{8}.10^3}$, e con più ragione di $\frac{1}{4.10^3}$.

Se poi il numero che moltiplica la minor potenza di 10 è 1, come negli errori relativi $\frac{1}{1.10^3}$ ed $\frac{1}{7.10^4}$, si prenderà per

errore relativo del prodotto $\frac{1}{9.10^{8}}$, cioè quello con la minor potenza di 10, sostituendo 9 all'unità che la moltiplica, e diminuendo di un' unità l'esponente. In effetti, l'errore relativo del prodotto essendo $\frac{1}{10^{5}}+\frac{1}{7.10^{4}}=\frac{70+1}{7.10^{4}}=\frac{1}{\frac{700}{71}.10^{8}}$.
il moltiplicatore di 10 sarà sempre eguale a 9 più una frazione, e trascurando questa frazione, l'errore relativo del prodotto sarà minore di $\frac{1}{9.10^{8}}$.

410. Allorchè gli esponenti di 10 differiscono di più unità, come negli errori relativi $\frac{1}{6.10^{3}}$ ed $\frac{1}{7.10^{5}}$, si può trascurare l'errore con la maggior potenza di 10, senza fare alcuna modifica nell'altro. Difatti, l'errore relativo del prodotto essendo $\frac{1}{6.10^{3}}+\frac{1}{7.10^{5}}=\frac{700+6}{6.7.10^{5}}=\frac{1}{6.\frac{700}{706}.10^{3}}$, si vede che il moltiplicatore della potenza di 10 è il prodotto di 6 per una frazione pochissimo differente dall'unità; perciò l'intero 6 può considerarsi rimanere inalterato, e sebbene l'errore relativo viene a ricevere una picciolissima diminuzione, pure questa vien compensata dall'essere gli errori relativi esatti dei fattori sempre minori de' loro limiti superiori, che negli esempi si prendono come errori relativi de' medesimi (*).

411. Se dunque nell'errore relativo di un prodotto può trascurarsi quello d'un fattore, quando l'esponente di 10 dell'errore relativo di questo fattore supera di più unità l'esponente

(*) Se si voglia essere più che sicuro del limite superiore dell'errore relativo del prodotto, si riterrà per errore relativo del medesimo quello con la minor potenza di 10, e si diminuirà di un'unità il moltiplicatore di questa potenza. Così nel nostro esempio si prenderà $\frac{1}{5.10}$ per errore relativo del prodotto. In effetti, $\frac{6.700}{706}$ è maggiore di 5, perchè la cifra 7 del divisore è contenuta 5 volte nel prodotto di 6 per 7, cioè in 42, con un avanzo maggiore della cifra seguente che è zero.

di 10 dell' errore relativo dell' altro fattore ; con più ragione potrà trascurarsi il prodotto degli errori relativi de' fattori, come fu accennato nel n.° 405.

412. Allorchè gli esponenti di 10 sono uguali negli errori relativi de' due fattori, si prenderà uno di questi errori per errore relativo del prodotto; ma al moltiplicatore della potenza di 10 si sostituirà l' intero, che si ha dal dividere il prodotto de' numeri che moltiplicano le due potenze di 10 per la somma de' medesimi numeri. Così p. e. se gli errori relativi dei fattori fossero $\frac{1}{4.10^3}$ ed $\frac{1}{7.10^3}$, si prende $\frac{1}{2.10^3}$ per errore relativo del prodotto, dove il moltiplicatore 2 di 10^3 è l' intero che si ottiene dal dividere il prodotto di 4 per 7, che è 28, per la loro somma 11. Difatti, l' errore relativo del prodotto essendo $\frac{7+4}{4.7.10^3}=\frac{1}{\frac{4.7}{4+7}.10^3}$, sarà minore di $\frac{1}{2.10^3}$.

413. Da ciò che si è detto si raccoglie che per errore relativo di un prodotto si può prendere quello del fattore che ha meno cifre esatte, a contar dalla prima significativa a sinistra, facendo una modifica nel numero che moltiplica la potenza di 10 quando gli esponenti di queste potenze negli errori relativi dei due fattori differiscono di una sola unità; e facendo anche una modifica nell'esponente di 10, quando la prima cifra significativa a sinistra del fattore che ha meno cifre esatte è l' unità (n.° 40[illegible]).

Ora siamo al caso di dare le seguenti regole.

I. *Le cifre esatte del prodotto saranno quante sono quelle esatte del fattore che ha meno cifre esatte, o una di meno; secondo che il numero che moltiplica la potenza di 10 nell' errore relativo del prodotto è maggiore, o no della prima cifra del prodotto.*

Questa regola ha un' eccezione nel caso in cui gli esponenti di 10 negli errori relativi dei fattori differiscono di un' unità, ed il coefficiente della minore potenza di 10 è l' unità, e la prima cifra del prodotto e 9 ; perchè allora il prodotto avrà una cifra esatta di meno di quante ne dà la regola (n.° 40[illegible]).

II. *Il quadrato avrà tante cifre esatte quante sono le cifre esatte della radice, o una di meno; secondo che il numero che moltiplica*

la potenza di 10 nell'errore relativo del quadrato supera, o no, la prima cifra del quadrato.

III. *Le cifre esatte della radice quadrata saranno tante quante sono le cifre esatte del numero dato da cui si estrae la radice, o una di meno, secondo che il numero che moltiplica la potenza di 10 nell' errore relativo della radice è maggiore, o no, della prima cifra della radice.*

414. **Passiamo ora agli esempi, ne'quali supporremo sempre che i numeri dati sono approssimati a meno di un'unità dell' infimo ordine, e cercheremo qual sia il grado di approssimazione del risultato proveniente da operazioni fatte su i medesimi.**

Inoltre facciamo notare che invece di dire che l'errore relativo di un numero approssimato, per esempio del numero 5,743, è minore del suo limite superiore $\frac{1}{5.10^3}$; per brevità, diremo essere questo limite l' errore relativo del numero.

Esempio I.) — Moltiplicazione. — Sieno da moltiplicarsi i numeri approssimati 61,132 e 0,32573. I loro errori relativi sono $\frac{1}{6.10^4}$ ed $\frac{1}{3.10^4}$; e quindi quello del prodotto sarà $\frac{1}{2.10^4}$ (n.° 410); e siccome si vede che la prima cifra del prodotto è minore di 2, il prodotto avrà (n.° 400) cinque cifre esatte; ma perchè le sue cifre sono dieci (*), otto delle quali sono decimali, esso sarà esatto sino alla cifra de' millesimi. Potremo dunque eseguire la moltiplicazione col metodo abbreviativo cercando il prodotto a meno di 0,001, come si vede quì affianco, e si troverà eguale a 19,913.

```
 0,325730
    23116
---------
 1 954380
    32573
     3257
      975
       64
---------
 19,91249
```

(*) Nel n.° 63 si fece vedere come dal numero delle cifre dei fattori si desume quello delle cifre del prodotto. Ora facciamo osservare che allorquando il prodotto delle due cifre a sinistra dei fattori è di due cifre, il prodotto totale avrà tante cifre quante ne sono ne' due fattori; perchè le colonne da addizionarsi formate dei prodotti parziali sono tante quante cifre sono ne' due fattori. Se poi il prodotto delle due cifre a sinistra dei fattori è di una cifra, si può pure dal prodotto delle prime cifre a sinistra dei fattori desumere il preciso numero delle cifre del prodotto, ed anche, conoscere qual sia la prima cifra a sinistra, considerando che, nell'addizionare i prodotti parziali, dalla somma delle cifre di una colon-

II. Sieno da moltiplicarsi i numeri approssimati 7,231 e 51,342. I loro errori relativi sono $\frac{1}{7.10^5}$ ed $\frac{1}{5.10^4}$; e quello del prodotto sarà $\frac{1}{5.10^5}$ (n.° 407); e siccome 5 è maggiore della prima cifra del prodotto, questo avrà quattro cifre esatte, ma tiene nove cifre, sei delle quali sono decimali; perciò sarà esatto sino alla cifra de' decimi. Potremo dunque eseguire la moltiplicazione col metodo abbreviativo, cercando il prodotto a meno di 0,1, e si troverà eguale a 631,5.

III. Sia da moltiplicarsi il numero approssimato 473,8749 pel numero esatto 1,273. L' errore relativo del prodotto sarà $\frac{1}{4.10^6}$. E siccome la cifra 4 non è maggiore della prima cifra del prodotto, questo avrà sei cifre esatte; ma tiene dieci cifre, e sette sono decimali, quindi sarà esatto sino alla cifra dei millesimi. Adunque trovando il prodotto approssimato a meno di 0,001, verrà eguale a 603,243.

IV. Elevazione a potenza. — Sia da elevarsi a quadrato il numero approssimato 74,358. Il suo errore relativo è $\frac{1}{7.10^4}$; è quello del quadrato è $\frac{2}{7.10^4}$ ossia $\frac{1}{\frac{7}{2}.10^4}$ (n.° 406), e quindi è minore di $\frac{1}{3.10^4}$. E, siccome la cifra 3 non è maggiore della prima cifra del quadrato, questo avrà quattro cifre esatte; ma tiene dieci cifre, sei delle quali sono decimali, perciò sarà esatto sino alla cifra delle unità. Potremo dunque formare il quadrato approssimato a meno di un' unità col metodo abbreviativo, e verrà eguale a 5530.

V. Sia da elevarsi a quadrato il numero approssimato 19,526.

L' errore relativo del quadrato sarà $\frac{2}{1.10^4} = \frac{1}{\frac{1}{2}.10^4} =$ $\frac{1}{\frac{10}{2}.10^3} = \frac{1}{5.10^3}$; e siccome la cifra 5 è maggiore della

---

na non si possono portare alla colonna seguente che tante unità, al massimo, quante cifre sono nella colonna precedente.

prima cifra del quadrato, questo avrà quattro cifre esatte; ma tiene nove cifre, sei delle quali sono decimali; perciò sarà esatto sino alla cifra de' decimi. Eseguendo il quadrato, si troverà eguale a 381,3.

VI. Sia da elevarsi a cubo il numero approssimato 74,358. L'errore relativo del cubo sarà $\frac{3}{7.10^4} = \frac{1}{\frac{7}{3} \cdot 10^4}$ (n.° 406), e quindi sarà minore di $\frac{1}{2.10^4}$; e siccome la cifra 2 è minore della prima cifra del cubo, questo avrà quattro cifre esatte; ma tiene quindici cifre, nove delle quali sono decimali, perciò sarà esatto sino alla cifra delle centinaia.

Divisione. — Si è detto (n.° 406) che l'errore relativo del quoziente e sensibilmente eguale alla somma o alla differenza degli errori relativi del dividendo e del divisore; ma nelle applicazioni si ammette il caso più sfavorevole, e si considera come eguale alla somma degli errori relativi del dividendo e del divisore, la quale somma sarà sempre un limite superiore dell'errore relativo del quoziente.

VII. Sia da dividersi il numero esatto 53,9576 pel numero approssimato 3,895. L'errore relativo del quoziente è uguale a quello del divisore, perchè quello del dividendo è zero, perciò sarà $\frac{1}{3.\ 10^3}$; e siccome la cifra 3 che moltiplica la potenza di 10 è maggiore della prima cifra del quoziente, questo avrà quattro cifre esatte. Or poichè la divisione si riduce a quella di 53957,6 per l'intero 3895, il quoziente terrà due cifre nella parte intera, ma esso deve avere quattro cifre esatte, dunque sarà esatto sino alla cifra de' centesimi. Potremo dunque eseguire la divisione abbreviata, cercando il quoziente approssimato sino a' centesimi, come qui affianco, e si troverà eguale a 13,85.

```
5395760 | 38950
15007   |-------
3222    | 13,85
210
20
```

VIII. Sia da dividersi il numero approssimato 5,386 pel numero esatto 42,4953. L'errore relativo del quoziente sarà $\frac{1}{5.10^3}$; e siccome la sua prima cifra è minore di 5, esso avrà quattro cifre esatte; e trasferendo la virgola per ridurre la divisione a quella in cui il divisore è intero, dovrà dividersi 53860

per 424953, quindi devono aggiungersi altri quattro zeri a dritta del dividendo per avere le quattro cifre esatte del quoziente; perciò dovrà dividersi 53860,0000 per 424953, e si avrà il quoziente esatto sino alla cifra de' diecimilesimi, che sarà 0,1267. La divisione si è eseguita qui affianco col metodo abbreviativo.

538600000	424953
11365	0,1267
2867	
323	
29	

IX. Sia da dividersi il numero approssimato 5394,3146 per l' altro approssimato 85,37213. L' errore relativo del quoziente è $\frac{1}{6.\,10^6}$; e siccome la cifra 6 non è maggiore della prima cifra del quoziente, esso avrà sei cifre esatte; ma perchè tiene due cifre nella parte intera, sarà esatto sino alla cifra de' diecimilesimi; quindi dovrà eseguirsi la divisione dopo aggiunti al dividendo altri quattro zeri, oltre del primo zero aggiunto per rendere intero il divisore.

X. Estrazione di radice. — Sia da estrarsi la radice quadrata dal numero approssimato 7,849: si vuol sapere quale sarà l' approssimazione della radice. L' errore relativo della radice è $\frac{1}{14.10^3}$ (n° 406); e poichè il numero 14 è maggiore della prima cifra della radice, questa avrà quattro cifre esatte, ma tiene una cifra nella parte intera, quindi sarà esatta sino alla cifra de'millesimi. Perciò si aggiungeranno tre zeri a dritta del numero dato per estrarne la radice espressa in millesimi, la quale sarà 2,801, e differirà dal vero per meno di 0,001.

Esempi in cui i numeri dati possono aversi con un' approssimazione illimitata.

415. Primieramente facciamo osservare che nella moltiplicazione l' errore relativo del prodotto dovendosi desumere dalla somma degli errori relativi dei fattori, conviene prendere i fattori con lo stesso numero di cifre esatte, a contar dalla prima significativa; altrimenti i loro errori relativi avrebbero le potenze di 10 con diverso esponente, e l' esponente maggiore non gioverebbe per nulla, perchè nel sommare gli errori relativi dei fattori per ottenere quello del prodotto, si tien conto del solo esponente minore; quindi gli errori relativi dei fat-

tori debbono prendersi col medesimo esponente, perciò i fattori si dovranno prendere collo stesso numero di cifre esatte a contar dalla prima significativa. L'esponente poi vien determinato dal numero delle cifre esatte che deve avere il prodotto, perciò deve avere tante unità quante sono le cifre esatte che si vogliono nel prodotto, o una di meno, secondo che il numero che moltiplica la potenza di 10 nella somma degli errori relativi de' fattori è minore o eguale, ovvero maggiore della prima cifra del prodotto.

XI. Sieno da moltiplicarsi i due decimali periodici 40,368989... e 0,0275275... Si cerca con quante cifre debbansi prendere per avere il prodotto con quattro decimali esatte. Osservando che il prodotto tiene una cifra nella parte intera, avrà cinque cifre esatte; perciò il suo errore relativo deve avere la quinta potenza di 10, se il numero che moltiplica questa potenza non è maggiore della prima cifra del prodotto; ma qui non è maggiore, perchè la prima cifra del prodotto è 2, e gli errori relativi de'fattori dovendo avere la stessa potenza di 10, il numero che moltiplica questa potenza nell' errore relativo del prodotto è 1 (n.° 410); perciò gli errori relativi de' fattori basta che abbiamo anche la quinta potenza di 10; quindi il primo deve prendersi sino alla cifra dei diecimilesimi, ed il secondo sino alla cifra de' diecimilionesimi. Converrà dunque eseguire la moltiplicazione de' numeri 40,3689 e 0,0275275, e si avrà il prodotto esatto sino alla cifra de' 10000^{mi}, che sarà 1,1113.

Si può anche ottenere il prodotto senza la considerazione degli errori relativi. Difatti, ricordando il modo di eseguire la moltiplicazione abbreviata, scorgiamo che se si riguarda il primo fattore come moltiplicando, esso deve arrestarsi alla cira de' milionesimi le quale è due posti a dritta di quella che indica l' ordine di approssimazione, e l' altro fattore deve prendersi con tante cifre decimali, quante sono le cifre a sinistra della cifra de' milionesimi del moltiplicando sino alla prima significativa. E però si moltiplicheranno col detto metodo i numeri 40,368989.. e 0,0275275, cercando il prodotto a meno di 0,0001, che si troverà essere 1,1113.

Si può osservare che col primo metodo, nel fare la moltiplicazione abbreviata, la quinta e sesta cifra decimale del primo fattore vengono supplite da zeri.

XII. Trovare con quante cifre deve calcolarsi il quoziente

che si ha dal dividere il numero 3,14159265358979323. . . , (il quale esprime il rapporto della circonferenza al diametro) pel numero 64800, affinchè il quadrato del quoziente 0,000048... abbia diciotto cifre esatte. Siccome il detto quadrato tiene otto zeri a sinistra della prima cifra significativa, dovrà avere 10 cifre esatte a contar da questa cifra; quindi il suo errore relativo terrà la 10^{ma} potenza di 10 se il numero che moltiplica questa potenza non è maggiore della prima cifra del quadrato; e qui non è maggiore, perchè la prima cifra del quadrato è 2, e l' errore relativo della radice avendo la potenza di 10 moltiplicata per 4, quello del quadrato l' avrà moltiplicata per 2; quindi basta che l' errore relativo del quadrato abbia la 10^{ma} potenza di 10, perciò esso sarà $\frac{1}{2.10^{10}}$; adunque è sufficiente che anche l'errore relativo della radice abbia la 10^{ma} potenza di 10; quindi basta prendere la radice con 11 cifre esatte a contar dalla prima significativa. E però la divisione deve spingersi sino alla 15^{ma} decimale.

XIII. Sia da estrarsi la radice quadrata del numero $374+\sqrt{52}$ approssimata sino a' centesimi. Primieramente osserviamo che la prima cifra del numero dato è 3, e quella della radice è 1; e siccome la radice ha due cifre nella parte intera, le cifre esatte debbono essere quattro; perciò nel suo errore relativo deve esservi la quarta potenza di 10, se il numero che moltiplica questa potenza non è maggiore della prima cifra della radice, ma qui è maggiore, perchè nell' errore relativo del quadrato il numero che moltiplica la potenza di 10 essendo 3, nell' errore relativo della radice sarà 6; quindi basta che l' errore relativo della radice abbia la terza potenza di 10; laonde esso sarà $\frac{1}{6.10^3}$. Adunque è sufficiente che anche l' errore relativo del quadrato abbia la stessa potenza di 10; perciò basta prendere il quadrato con quattro cifre esatte; ma esso tiene tre cifre nella parte intera, dunque deve avere una sola cifra esatta nella parte decimale; quindi sarà sufficiente estrarre la radice da 52 arrestandosi alla cifra de' $10.^{mi}$, e questa radice si troverà essere 7,2, che aggiunta a 374 si avrà il numero 381,2; dunque infine da questo numero bisognerà estrarre la radice espressa in 100^{mi} che verrà eguale a $\sqrt{19{,}52}$, e differirà dal vero per meno di 0,01.

XIV. Sia da estrarsi la radice da $8{,}74+\sqrt{5{,}9}$. approssi-

mata a meno di 0,001. Prima di tutto osserviamo che la prima cifra del numero dato è 1, e quella della radice è 3; e siccome la radice ha una sola cifra nella parte intera, le cifre esatte saranno quattro; quindi nell'errore relativo della radice deve esservi la quarta potenza di 10, se il numero che moltiplica questa potenza non è maggiore della prima cifra della radice, come avviene in questo esempio, ove il numero che moltiplica la potenza di 10 essendo 1 nell'errore relativo del quadrato, nell'errore relativo della radice sarà 2; perciò l'errore relativo della radice sarà $\frac{1}{2.10^4}$. Dunque basterà che anche l'errore relativo del quadrato abbia la quarta potenza di 10, e quindi il quadrato deve avere cinque cifre esatte, ma tiene due cifre nella parte intera, dunque deve avere tre cifre decimali esatte; e però bisognerà estrarre la radice da 5,9 arrestandosi alla cifra de' 1000^{mi}, e si troverà per radice 2,429, che aggiunta ad 8,74, si avrà il numero 11,169, da cui si estrarrà la radice espressa in millesimi, che sarà 3,342, e differirà dal vero per meno di 0,001.

XV. Sia da estrarsi la radice da $483712+\sqrt{6,73}$ approssimata a meno di 0,01. Qui si può disprezzare la parte $\sqrt{6,73}$, e si può anche supporre essere zero invece di 2 l'ultima cifra del numero 483712. Difatti, la radice dovendo avere 5 cifre esatte perchè ne ha 3 nella parte intera, il suo errore relativo terrà la quarta potenza di 10, perchè il numero 8 che moltiplica questa potenza è maggiore della prima cifra 6 della radice; dunque basta che anche l'errore relativo del quadrato abbia la quarta potenza di 10, quindi è sufficiente che il quadrato abbia cinque cifre esatte; e siccome $\sqrt{6,73}$ che si aggiunge al numero 483712 non influisce sull'esattezza delle prime 5 cifre, si può al tutto disprezzare, e si può anche cambiare in zero l'ultima cifra 2 del numero 483712. Così sarà sufficiente estrarre la radice sino a' 100^{mi} dal numero 483710; perciò si aggiungeranno quattro zeri alla sua dritta, e se n'estrarrà la radice, che sarà esatta sino a' 100^{mi}, e sarà 695,49.

416. L'andamento tenuto per l'estrazione della radice quadrata mostra come bisognerebbe operare per l'estrazione della radice cubica.

417. Allorchè la cifra a sinistra di un numero approssimato è uguale alla cifra che moltiplica la potenza di 10 nell' errore relativo, sarebbe utile se si potesse avere l'errore relativo il cui denominatore non fosse espresso per mezzo di una potenza di 10, perchè verrebbe a conoscersi che le cifre esatte sono una dippiù di quelle date dalla regola, se la seconda cifra del numero approssimato, a contare da sinistra fosse minore della seconda del denominatore dell' errore relativo; lo stesso avviene se la seconda essendo eguale alla seconda, fosse poi la terza minore della terza; e così di seguito, come si rileva dal n.° 401.

Quest' osservazione conduce alla segnente regola.

Le cifre esatte della radice quadrata di un numero approssimato sono quante sono le cifre esatte di esso numero, allorchè la sua parte intera tiene un numero pari di cifre, e la coppia a sinistra e 25 o maggiore di 25.

In primo luogo osserviamo che qnando le due prime cifre a sinistra del numero formano 50 o più, la proposizione è vera, perchè allora il denominatore dell' errore relativo della radice, il quale è doppio di quello dell' errore relativo del numero dato, ha una cifra esatta dippiù delle cifre esatte del numero dato; perciò le cifre esatte della radice quadrata sono quante sono quelle del numero dato.

Passiamo ora ad esaminare il caso in cui le cifre a sinistra del numero dato facessero un numero minore di 50, ma non minore di 25. Sia il numero approssimato 2549,327 da cui debba estrarsi la radice quadrata. L' errore relativo della radice è $\frac{1}{508...}$; e siccome le prime cifre della radice fanno 504.., e le due prime del denominatore dell' errore relativo sono eguali alle due prime della radice, ma la terza è minore della terza, perciò le cifre esatte sono quante sono qnelle dell' errore relativo, ossia quante sono qnelle del numero dato. Abbiamo supposto che la cifra a dritta di 25 sia 4; lo stesso avviene quando essa è 3, 2, 1, o zero; in effetti, quando la cifra è 4, siceome la terza della radice si trova dividendo il resto 49... pcl doppio dclle prime cifre di essa, che è 100, si vede che 1 in 4 è contenuto 4 volte, e perciò la terza cifra della radice è 4, che è minore di 8. Similmente si vede che se la cifra dopo 25 è 3, la terza della radice è pure 3, mentre la terza dell' errore relativo è 6; e quando la terza del numero è 2, la terza della radice è pure 2, mentre la terza dell' errore relativo è 4 che è maggiore di 2; e se la terza del numero è 1, la terza della radice è pure 1, e la terza dell' errore relativo è 2. Se poi le cifre dopo 25 sono zeri, saranno anche zeri le cifre dopo la prima della radice]; ed arrestandosi alla prima cifra della radice che non è zero, e che supponiamo essere la quarta, essa è minore della quarta dell' errore relativo, la quale è il doppio o il doppio aumentato di 1, salvo solo se la detta cifra della radice fosse 5 o maggiore di 5; ma allora mentre la quarta della radice è zero, la terza dell'errore relativo sarà una cifra significativa, e perciò maggiore della quarta della radice.

Se poi la terza del numero proposto fosse maggiore di 4, la seconda dell' errore relativo sarà una cifra significativa, mentre le due prime

cifre della radice formano 50, quindi la seconda dell'errore relativo è maggiore della seconda della radice.

Se poi le due prime cifre del numero formano 26, 27, 28, 29, le due prime dell'errore relativo formeranno 52, 54, 56, 58, ovvero 53, 55, 57, 59; e siccome nell'estrarre la radice quadrata, dopo tolto il quadrato di 5 da 26, 27, 28, 29, resta rispettivamente 1, 2, 3, 4; abbassando poi l'altra coppia accanto uno di questi resti; e facendosi la divisione per 10, che è il doppio della prima cifra della radice, i rispettivi quozienti saranno 1, 2, 3, 4; dunque la seconda cifra della radice sarà 1, 2, 3, 4, secondo che la seconda del denominatore dell'errore relativo è 2 o 3, 4 o 5, 6 o 7, 8 o 9.

Infine, allorchè il numero comincia da 30, 31, 32, 33, 36; siccome il doppio è 60, 62, 64, 66, 68, la prima cifra del denominatore dell'errore relativo comincia da 6, e perciò è maggiore della prima del numero che comincia da 5. Quando poi arriva a 35, 36, ec. la prima cifra del denominatore dell'errore relativo comincia da 7, perchè il doppio è 70, 72, ec. mentre la prima della radice comincia da 5 o da 6. Similmente procedendo si vede che se le due prime cifre fossero 40, 41, ec. si verificano le stesse condizioni.

Si è detto da principio che il numero delle cifre della parte intera deve esser pari, perchè in tal caso l'estrazione della radice comincia a farsi da una coppia di cifre a sinistra del numero dato; e cesserebbero di aver luogo tutte le precedenti considerazioni, se si dovesse estrarre la radice da una sola cifra a sinistra del numero per avere la prima cifra della radice.

DEI DIFFERENTI SISTEMI DI NUMERAZIONE.

418. Nel n.° 25 definimmo il sistema di numerazione, ed osservammo che la base del nostro sistema di numerazione è *dieci*.

Ciò premesso: è chiaro che possono formarsi infiniti sistemi di numerazione, perchè invece di prendere per base *dieci*, potremmo prendere per base un altro numero qualunque.

Se p. e. volesse formarsi il sistema di numerazione che avesse per base *dodici*, ci vorrebbero dodici cifre, e restando per i nove primi numeri lo medesime cifre, ne bisognerebbero due altre per rappresentare i numeri *dieci* ed *undici*, e sempre lo *zero* bisognerebbe per indicare la mancanza di qualche ordine di unità. Adoperando le lettere α e β dell'alfabeto greco per rappresentare i numeri dieci ed undici, un numero che avesse sette unità del prim'ordine, cinque di secondo, undici di terzo, zero di quarto, e dieci di quinto, si scriverà così $\alpha 0 \beta 57$.

Per leggersi si dovrebbero dare nomi bisillabi ai numeri *undici* e *dodici*, affinchè i numeri del sistema duodecimale si potessero pronunciare con semplicità; perchè i nomi dei nu-

meri di due cifre, di tre cifre, di quattro, ec. si compongono dei nomi dei primi dodici numeri. Se ci volessimo servire degli stessi nomi trisillabi *undici* e *dodici*, l'unione di dieci dozzine dovrebbe chiamarsi *diecianta*, e quella di undici *undicianta*, rimanendo i nomi *venti*, *trenta*, *quaranta*, ec. per esprimere rispettivamente due dozzine, tre dozzine, quattro dozzine, ec.; ed i nomi *cento*, *mille*, *milione*, ec. servirebbero sempre a dinotare rispettivamente un'unità di terz'ordine, di quarto, e di settim'ordine. Dopo ciò il numero 10 ch'esprime un'unità di second'ordine o una dozzina dovrebbe leggersi *dodici*. I numeri 11, 12, 13, . . . 1β dovranno leggersi *dodiciuno*, *dodicidue*, *dodicitre*, . . . *dodiciundici*.

Il numero $\alpha 0 \beta 57$ scritto più sopra, dovrebbe leggersi *dieciantamila undicicento cinquantasette*; ed il numero $\beta\alpha 10 \alpha \beta 5$ dovrebbe leggersi *undici milioni diecicentododicimila diecicentoundiciantacinque*.

Un numero scritto nel sistema di numerazione la cui base è minore di dieci non avendo bisogno di nuovi nomi, si legge come ogni numero del sistema di base dieci; purchè si dia il nome *dieci* alla base del nuovo sistema, altrimenti conviene modificare la lettura di ciascun gruppo ternario allorchè la sua cifra di mezzo è 1. Così p. e. il numero 516 nel sistema settenario, volendo lasciare il nome *sette* alla base, deve leggersi: *cinquecentosettesei*; ed il numero 215634 deve leggersi *duecentosettecinque seicentotrentaquattro*. Non tralasciamo ricordare che qui il migliaio è sette centinaia, ed il centinaio e sette settenari, chiamando *settenario* sette unità. Inoltre notiamo che un nunumero scritto in un sistema, come p. e. 53723 in cui si trova la cifra 7, non può appartenere ad un sistema che ha per base *sette*, e molto meno può appartenere ad un sistema di base superiore, perchè non vi è bisogno che di sei cifre e dello zero per rappresentare un numero nel sistema di base sette.

419. Un numero qualunque può essere rappresentato da lettere. In effetti, indicando con a le unità di primo ordine, con b le unità di second'ordine, con c le unità di terz'ordine, con d quelle di quarto, ec., esso può essere rappresentato dalle lettere a, b, c, d, ec., mettendo a nel primo posto a dritta, b nel secondo, c nel terzo, d nel quarto, e così di seguito; perciò verrà rappresentato da ... $dcba$.

Inoltre un numero può esser rappresentato mediante un polinomio ordinato secondo le diverse potenze della base del sistema di numerazione.

Si chiama *polinomio* una quantità rappresentata da lettere, e composta da parti che sono riunite con i segni *più* o *meno*, e queste parti diconsi *termini* del polinomio.

Così la quantità $a+bc^2-d^3+af$ è un polinomio, dove facciamo osservare che le quantità bc^2, ed af equivalgono rispettivamente a $b\times c^2$ ed $a\times f$, essendosi convenuto dai matematici che quando le quantità rappresentate da lettere debbono moltiplicarsi fra loro, si scrivono l'una vicino all' altra senza segno di moltiplicazione. In generale poi qualunque quantità rappresentata da lettere dicesi *espressione algebrica.*

Le quantità a, bc^2, d^3, af che sono riunite dai segni *più* o *meno*, sono i *termini* del polinomio. In particolare poi una quantità che ha un sol termine, come ac^2, si dice *monomio;* e si dice *binomio* se ne ha due, come cd^2+h^3; si dice *trinomio* se ne ha tre, come a^2-cd+f; e dicesi *quadrinomio* se ne ha quattro, come $b^2-ch+b^3-f^2$.

Se i termini di un polinomio sono scritti in modo che gli esponenti di una lettera vanno sempre crescendo o sempre diminuendo, esso si dice *ordinato* secondo le potenze *crescenti* o *decrescenti* di quella lettera. Così il polinomio $ba^2+cda^3+fa^4-da^5$, è ordinato secondo le potenze *ascendenti* o *crescenti* della lettera a; ed il polinomio $dx^4-cfx^3+px^2-qx+r$, è ordinato secondo le potenze *discendenti* o *decrescenti* della lettera x.

Ciò premesso, facciamo primieramente vedere che:

Un numero del sistema decimale può esser rappresentato da un polinomio ordinato secondo le potenze della base 10. In effetti, indichiamo con a le unità di prim' ordine, con b quelle di secondo, con c quelle di terzo, con d quelle di quarto ec.; abbiamo che essendo b le decine del numero proposte, le unità contenute in b saranno $b\times10$; ed essendo c le centinaia del numero proposto, le unità di c saranno $c\times100$, ossia $c\times10^2$; ed essendo d le migliaia del numero proposto, le unità di d saranno eguali a $d\times1000$, ossia $d\times10^3$; e così di seguito; perciò le unità del numero proposto saranno rappresentate dal polinomio $a+10\,b+10^2\,c+10^3\,d+$ ec.

Passiamo ora a dimostrare l' analoga proposizione per qualunque sistema.

Indichiamo con B le unità della base del sistema di numerazione, e con a, b, c, d ec. le unità del primo, del secondo, del terzo, e del quart' ordine rispettivamente di un numero; questo numero sarà rappresentato da ...$dcba$.

Ora le unità di b, che sono di second' ordine, sono B volte maggiori di b unità di prim' ordine; perciò b è uguale ad un numero di unità di prim' ordine indicato da Bb. Similmente le unità di c che sono di terz' ordine, sono B volte maggiori di c unità di second' ordine, cioè sono eguali a Bc unità di second' ordine; ma queste sono eguali a $B.Bc$ unità di prim' ordine; dunque c è uguale ad un numero di unità di prim' ordine indicato da B^2c. Parimenti si vede che d è uguale

ad un numero di unità di prim' ordine indicato da B^3d ; e così di seguito. Quindi possiamo conchiudere che le unità del numero proposto ...*dcba* sono rappresentate dal polinomio

$$a+bB+cB^2+dB^3+eB^4....$$

Questa formola giova a tradurre un numero da qualunque sistema nel sistema decimale. Sia p. e. il numero 2345 scritto nel sistema settenario che si vuole tradurre nel sistema decimale. Facciamo la prima e la seconda potenza della base 7, e scriviamo, come qui affianco i valori delle quantità rappresentate da lettere; poi sommiamo le quantità a, Bb, cB^2, dB^3 della formola, e ne risulterà il numero 866. Quindi conchiudiamo che il numero 2345 scritto nel sistema settenario è uguale al numero 866 scritto nel sistema decimale.

$$\begin{array}{lll} a=5 & B=7 & a=5 \\ b=4 & B^2=49 & bB=28 \\ c=3 & B^3=343 & cB^2=147 \\ d=2 & & dB^3=686 \\ \hline & & 866 \end{array}$$

Ma vi è ancora la seguente maniera con cui un numero scritto in un qualunque sistema si traduce nel sistema decimale.

DATO UN NUMERO SCRITTO IN UN SISTEMA DIVERSO DAL DECIMALE, SCRIVERLO NEL SISTEMA DECIMALE.

420. *Si moltiplica la prima cifra a sinistra del numero dato per la base del dato sistema, ed al prodotto si aggiunge la seconda cifra; poi la somma si moltiplica di nuovo per la base, ed al prodotto si aggiunge la terza cifra; indi la somma si moltiplica nuovamente per la base, ed al prodotto si aggiunge la quarta cifra, e così seguitando sino ad aggiungere l' ultima cifra a dritta, si otterrà il numero espresso in unità degli ordini del sistema decimale.*

Sia p. e. il numero $2\alpha507\beta$ scritto nel sistema duodecimale che voglia convertirsi nel sistema decimale. Siccome ogni unità di ciascun ordine è dodici volte maggiore di un' unità dell' ordine immediatamente inferiore, se moltiplichiamo la cifra 2 a sinistra del numero proposto per 12, le 2 unità del sest' ordine si convertiranno in 24 di quinto, alle quali aggiungendo le dieci unità di quint' ordine rappresentate da α, si trova che il numero dato contiene 34 unità di quint' ordine. Poi queste unità si convertiranno in unità di quart' ordine moltiplicandole per 12, e si avrà per prodotto 408 a cui aggiungendo le 5 unità di quarto ordine si avranno 413 unità di quart' ordine. Indi queste si riducono ad unità di terz' ordine moltiplicandole per 12 e si aggiungeranno al prodotto le zero unità del terzo ordine; e così seguitando, si troverà che il numero proposto ridotto in unità di prim' ordine viene eguale a 713759 unità semplici; così esso si troverà convertito dal sistema duodecimale in quello decimale.

Passiamo ora a risolvere la questione inversa.

DATO UN NUMERO SCRITTO NEL SISTEMA DECIMALE, SCRIVERLO IN UN ALTRO SISTEMA.

421. *Si divide il numero dato ed i quozienti successivi per la nuova base; le cifre che rappresentano i resti e l' ultimo quoziente saranno quelle che, a contar da dritta, rappresentano il numero scritto nel nuovo sistema.*

Abbiasi il numero 6032 scritto nel sistema decimale, e si voglia scriverlo nel sistema settenario: eseguendo le divisioni come si è detto nella regola, e secondo si vede qui affianco, si ottengono per resti successivi i numeri 5, 0, 4, 3, e per ultimo quoziente 2; perciò il numero proposto scritto nel sistema settenario sarà 23405.

```
6032 | 7
   5 | 861 | 7
         0 | 123 | 7
               4 | 17 | 7
                    3 | 2
```

Difatti, un' unità del second' ordine del nuovo sistema contenendo 7 unità semplici, si avranno le unità di second' ordine del nuovo sistema dividendo il numero proposto per 7; e poichè si ottiene per quoziente 861 e per resto 5, saranno 861 le unità di second' ordine, e 5 le unità semplici. Similmente, perchè 7 unità di second' ordine del nuovo sistema formano un' unità di terz' ordine del medesimo sistema, si avranno le unità di terz' ordine del nuovo sistema dividendo le 861 unità di second' ordine per 7, e si ottengono 123 unità di terz' ordine, e vi restano *zero* unità di second' ordine. Dividendo poi le 123 unità di terz' ordine per 7, si avranno le unità di quart' ordine che saranno 17, e vi restano 4 unità di terz' ordine. Infine dividendo le 17 unità di quart' ordine per 7, si avranno 2 unità di quint' ordine, e vi restano 3 di quarto. Adunque il numero proposto convertito nel sistema settenario contiene 2 unità di quint' ordine, 3 di quarto, 4 di terzo, *zero* di secondo, e 5 di primo; perciò nel sistema settenario verrà scritto così, 23405.

422. Se si ha un numero scritto in un sistema diverso del decimale, e vogliasi convertire in un sistema anche diverso dal decimale, prima si converte nel sistema decimale, e poi col metodo precedente si converte nell' altro sistema che si vuole.

423. Il sistema duodecimale sarebbe stato più vantaggioso del decimale, perchè nel misurare una grandezza minore dell' unità, la quale nel sistema duodecimale si dovrebbe dividere e suddividere in parti dodicesime, si potrebbe esattamente ottenere la metà, la terza, la quarta, e la sesta parte dell' unità; mentre nel sistema decimale non si può prendere che la metà e la quinta parte, e, se si vuole la quarta parte, bisogna ricorrere alle unità dell'ordine inferiore, cioè ai centesimi, i quali sono espressi da un numero di due cifre, cioè da 25 centesimi.

Il sistema *binario* è il più semplice, avendo riguardo al numero delle cifre di cui ha bisogno, perchè per esso bastano le sole cifre *1* e *0*; ma da un' altra parte si rende il più complicato, perchè si richieggono molte di queste cifre per scrivere un numero anche minore di dieci, così p. e. *otto*, che è un'unità di quart' ordine, si scriverebbe *1000* e si leggerebbe *mille*.

REGOLO CALCOLATORE.

424. Il *regolo calcolatore* è un istrumento che si usa per eseguire rapidamente quei calcoli nei quali è sufficiente che il risultato si abbia con una certa approssimazione. Esso diccesi anche *regolo logaritmico*, e si compone di due parti della stessa lunghezza, una fissa detta *regolo*, e l'altra mobile detta *regoletto* la quale scorre con dolce strofinio in una scanalatura praticata nel mezzo del regolo in senso della lunghezza. Il regolo che ordinariamente si usa è di 25 o 26 centimetri, ed in questo l'approssimazione è circa $^1/_{500}$ del risultato finale.

Il regoletto divide la lunghezza del regolo in due parti eguali, una detta *superiore*, e l'altra *inferiore*. La parte superiore è divisa per metà, e su ciascuna metà si trovano segnati con tratti i logaritmi dei numeri da 1 sino a 10, che, sul regolo di 25 centimetri, variano di centesimo in centesimo.

Per segnare i logaritmi dei detti numeri sulla prima metà del regolo, si formerà una scala di 1000 parti eguali, e mediante questa scala si dividerà la prima metà del regolo anche in 1000 parti eguali, come s'insegna nella geometria; ma atteso la sua breve lunghezza, che è 13 centimetri, non potendosi dividere in 1000 parti eguali, vi si segneranno quante più divisioni si possono, sicchè almeno corrispondano ai logaritmi dei numeri differenti fra loro di $^1/_{100}$. E però prima si segneranno i tratti principali corrispondenti ai logaritmi di 1, 2, 3, ec., sino a 10. Il primo tratto principale, che è quello da cui comincia il regolo, e che si chiama *tratto iniziale*, si segna col numero 1, perchè in esso la lunghezza è zero, che è il logaritmo di 1. Il secondo tratto principale, che è quello corrispondente a 301 millesimi della scala, si segna col numero 2, perchè la sua distanza dal tratto iniziale è il logaritmo di 2. Il terzo tratto principale, che è quello corrispondente a 477 millesimi della scala, si segna col numero 3, perchè la sua distanza dal tratto iniziale è il logaritmo di 3. Similmente si prosegue sino al decimo tratto principale che corrisponde alla distanza di 1000 millesimi della scala dal tratto iniziale, e che si segna col numero 10, perchè la detta distanza essendo eguale ad 1 è il logaritmo di 10.

Dopo segnate le divisioni principali si segnano quelle di 2° ordine, cioè quelle corrispondenti ai logaritmi dei numeri che, da 1 sino a 10, differiscono di un decimo; perciò vi sa-

ranno 9 divisioni di 2° ordine fra due divisioni principali consecutive. Così le divisioni di 2° ordine fra le divisioni principali 1 e 2 corrispondono ai logaritmi di 1,1, di 1,2, di 1,3, ec. sino ad 1,9; lo stesso si dica delle divisioni di 2° ordine fra le divisioni principali 2 e 3, fra 3 e 4, ec.

Dopo segnate le divisioni di 2° ordine si segnano quelle di terz' ordine che debbono indicare i logaritmi dei numeri, da 1 a 10, differenti fra loro di un centesimo, Ma essendo angusto lo spazio fra due divisioni consecutive di second' ordine, non possono fra esso segnarsi tutte le divisioni di terz'ordine che corrispondono ai numeri differenti fra loro di un centesimo; ed è perciò che fra le divisioni di 2° ordine comprese fra i numeri 1 e 2 si trovano segnati solo 4 tratti che corrispondono ai logaritmi dei numeri crescenti di 2 in 2 centesimi, essendo troppo breve lo spazio per segnarvi i logaritmi dei numeri differenti per un centesimo ; quindi deve apprezzarsi ad occhio il numero corrispondente nell' intervallo compreso fra due divisioni di terz' ordine.

L' intervallo fra 2 e 3 essendo minore di quello fra 1 e 2, le divisioni di 3° ordine comprese fra due consecutive di 2° ordine non sono più 4, ma è una sola, dovendo valutarsi a vista il numero corrispondente ad un punto compreso fra due divisioni di 3° ordine. Lo stesso avviene per le divisioni di 3° ordine fra 3 e 4, e fra 4 e 5; ma da 5 a 6, da 6 a 7, ec. sino a 10 i cui intervalli fra due divisioni principali sono più brevi, non più si trovano divisioni di 3° ordine, e deve calcolarsi ad occhio il numero corrispondente fra due intervalli di 2° ordine. L' altra metà superiore del regolo è divisa come la prima, e le divisioni cominciano dove finisce la prima metà. Il regoletto è diviso identicamente alla parte superiore del regolo. La metà inferiore del regolo non è divisa in due parti, cioè non ha una doppia scala, ma l' intera sua lunghezza si prende per unità, ed è divisa con la stessa legge con cui si è divisa la metà superiore; e perciò gl' intervalli fra le divisioni di 1° ordine, fra quelle di 2°, e fra quelle di 3° sono il doppio degl' intervalli della metà superiore del regolo; quindi è che fra le divisioni principali 1 e 2, si hanno potuto segnare con precisione i logaritmi dei numeri differenti fra loro di un centesimo, e si potrebbero valutare ad occhio quelli dei numeri differenti a un dipresso per un millesimo.

425. Passiamo ora a vedere come può leggersi un numero

corrispondente ad un tratto sulla parte superiore del regolo, o sul regoletto. Consideriamo p. e. il 7° tratto di 2° ordine fra le divisioni principali 1 e 2; esso indica che la sua distanza da 1 è il logaritmo di 1,7. Consideriamo il 3° tratto di 3° ordine fra il 7° ed 8° di 2° ordine compresi fra le divisioni principali 1 e 2; esso indica che la distanza da 1 sino al detto tratto è il logaritmo di 1,76, perchè i tratti di 3° ordine fra le divisioni principali 1 e 2 corrispondono a numeri che variano di 2 in 2 centesimi. Leggiamo il numero corrispondente al 4° tratto di 3° ordine fra il tratto iniziale e la prima divisione di 2° ordine; esso tratto indica che la sua distanza da 1 è il logaritmo di 1,08. Leggiamo ancora il numero corrispondente al tratto di terz'ordine fra il 3° e 4° di second'ordine che sono fra le divisioni principali 4 e 5, il cercato numero sarà 4,35. Infine, se si volesse leggere il numero corrispondente nel mezzo dell'intervallo fra il 2° ed il 3° tratto di 2° ordine compresi fra le divisioni principali 7 ed 8, questo numero sarà 7,25.

È chiaro poi che se il regolo fosse più lungo, p. e. di 4 decimetri, potrebbero leggersi su di esso quasi con esattezza i numeri di quattro cifre.

La metà a dritta del regolo essendo divisa nello stesso modo che quell' a sinistra , le distanze delle sue divisioni dalla metà del regolo , ossia dal tratto corrispondente al numero 10, sono anche i logaritmi dei numeri da 1 a 10; ma le distanze delle medesime divisioni dal tratto iniziale sono i logaritmi dei numeri da 10 a 100, cioè dei numeri che sono in continuazione di quelli della prima metà. Perciò le cifre 2 , 3, 4, sulla seconda metà del regolo corrispondono a 2 decine, a 3 decine, a 4 decine, ec; in effetti, la distanza da 10 a 2 nella seconda parte del regolo è il logaritmo di 2, ma la distanza di 2 dal tratto iniziale è uguale ad 1 + log. 2, ovvero a log. 20. Similmente la distanza da 10 del tratto di 3° ordine compreso fra il 4° ed il 5° di 2° ordine, i quali sono fra le divisioni principali 2 e 3 della seconda metà del regolo , è il logaritmo di 2,45 ; ma la distanza del medesimo tratto di 3° ordine dal tratto iniziale è uguale ad 1 + log. 2,45, ossia a log. 24,5; perciò i tratti che sono sulla seconda metà del regolo possono riguardarsi come i logaritmi dei numeri da 10 a 100, i quali sono in continuazione dei logaritmi dei numeri da 1 a 10 corrispondenti alla prima metà; con la dif-

ferenza che nella seconda metà sono numeri di tre cifre differenti fra loro di $^1/_{10}$.

426. Vediamo ora come mediante il regolo può farsi la moltiplicazione di due numeri ciascuno di tre cifre.

Sia da moltiplicarsi 134 per 285. Riduciamo questi numeri ad avere una cifra nella parte intera, separando con la virgola due cifre dalla dritta di ciascuno; ed invece di moltiplicare i numeri proposti, moltiplichiamo i numeri 1,34 per 2,85, perchè i logaritmi di questi numeri si trovano segnati con tratti sul regolo e sul regoletto; ed è chiaro che tanto è trovare il prodotto di 1,34 per 2,85 quanto è trovare quello dei medesimi numeri senza la virgola; e solo bisognerà stabilire l'ordine di unità della cifra a sinistra, che si desume dai n.ri 63 e 414. Nel nostro esempio il prodotto deve avere cinque cifre, e perciò la prima cifra a sinistra esprime decine di migliaia.

Ciò premesso: il logaritmo del numero 1,34 sulla parte superiore a sinistra del regolo è la distanza da 1 del 2° tratto fra il 3° ed il 4° tratto di 2° ordine, i quali sono fra le divisioni principali 1 e 2; ed il logaritmo del numero 2,85 sul regoletto è la distanza da 1 del punto medio fra l'ottavo e nono tratto di 2° ordine compresi fra le divisioni principali 2 e 3. Or siccome il logaritmo del prodotto pareggia la somma dei logaritmi dei fattori, si farà scorrere il regoletto finchè il suo tratto iniziale il quale chiamasi *indicatore*, cada sotto il tratto del regolo corrispondente al numero 1,34 della parte superiore a sinistra; poi si osserva sul regoletto il numero 2,85 a quale tratto del regolo è sottoposto, ed il numero 3,81 del regolo corrispondente a questo tratto, sarà il prodotto cercato; perchè la distanza del tratto corrispondente a questo numero dal tratto iniziale del regolo è la somma dei logaritmi dei fattori, e perciò tale distanza è il logaritmo del prodotto; ma siccome il prodotto deve avere cinque cifre nella parte intera, perchè esso è il prodotto di 134 per 285, il prodotto dato dal regolo sarà 381000, il quale differisce dal vero, che è 38190, per $^1/_{381}$.

Se si fosse preso 382, come avrebbe potuto farsi, perchè il regolo non fa vedere con precisione se sia più prossimo 381 o 382, si sarebbe avuto un prodotto più approssimato.

427. Sia ora da dividersi 9768 per 254. Ridurremo i numeri ad una cifra nella parte intera, per la ragione detta nel precedente esempio, e disprezziamo la cifra 8 del dividendo, au-

mentando la cifra 6 di un' unità; quindi l' operazione si riduce a dividere 9,77 per 2,54, e si avranno nel quoziente le stesse cifre che si avrebbero se la virgola non vi fosse ; la regola poi del n.° 88 farà conoscere l' ordine di unità della cifra a sinistra, che in questo caso deve esprimere decine.

Per avere il quoziente si porrà il tratto corrispondente al divisore letto sul regoletto , sotto il tratto corrispondente al dividendo letto sul regolo; e siccome il numero 2,54 letto sul regoletto corrisponde al punto che è a sinistra del tratto di 3° ordine il quale è fra il 5° ed il 6° di 2° ordine compresi fra le divisioni principali 2 e 3 ; ed il numero 9,77 letto sul regolo corrisponde ad un punto che è fra il 7° ed 8° tratto di 2° ordine compresi fra le divisioni principali 9 e 10; così si porrà il cennato punto del regoletto sotto il predetto punto del regolo, e poi si leggerà sul regolo il numero 3,84 corrispondente all' indicatore del regoletto, e questo sarà il quoziente , perchè il logaritmo del quoziente è uguale al logaritmo del dividendo diminuito di quello del divisore ; ed è chiaro che la distanza fra il tratto iniziale del regolo e l'indicatore del regoletto è la differenza fra il logaritmo del dividendo e quello del divisore. Or siccome il quoziente deve avere due cifre nella parte intera , il quoziente cercato dato dal regolo sarà 38,4, che è uguale a quello dato dal calcolo sino alla cifra dei decimi:

428. Passiamo ora a vedere come col regolo si possa trovare il quarto termine di una proporzione; ed osserviamo primieramente che fissando l' indicatore sotto un tratto qualunque del regolo, tutti i numeri che si corrispondono l' uno sotto l' altro sul regolo e sul regoletto hanno un rapporto costante, e questo è il numero letto sul regolo corrispondente all' indicatore. Così p. e. se l' indicatore si pone sotto il tratto del regolo che corrisponde al numero 2,50, si trova che sono l' uno sotto l' altro i numeri 2 e 5, 4 e 10, 1,4 e 3,5, ec.; questi numeri hanno un rapporto costante, perchè il logaritmo di $^5/_2$ di $^{10}/_4$, e di $^{3,50}/_{1,40}$ è lo stesso , essendo esso la differenza fra il tratto iniziale del regolo e l' iniziale del regoletto ; perciò questo quoziente o rapporto si legge sul regolo in corrispondenza dell' indicatore, ed è il numero 2.50.

Ora se vogliasi moltiplicare il detto quoziente o rapporto per 4,35, basterà leggere sul regolo il numero corrispondente al nu-

mero 4,35 del regoletto, e si trova che il prodotto cercato è 10,82, il quale differisce di 0,3 da quello dato dal calcolo.

Dopo ciò è facile vedere che il prodotto che si è trovato è il quarto termine della proporzione $2 : 5 :: 4,35 : x$; perchè il quarto termine di una proporzione non è che il prodotto del rapporto fra due numeri per un terzo numero.

Dunque: *per trovare il quarto termine di una proporzione, si pone il primo termine letto sul regoletto sotto il secondo letto sul regolo, ed il numero letto sul regolo, che sta al disopra del terzo termine letto sul regoletto, sarà il quarto della proporzione.*

Per vedere come possono farsi altri calcoli col regolo, bisogna consultare gli opuscoli che ne trattano distesamente, così si vedrà come le divisioni fatte sulla parte inferiore del regolo e sul rovescio del regoletto servono ad elevare a quadrato i numeri e ad estrarre le radici, non che a trovare i logaritmi dei numeri e viceversa, ed anche a trovare le linee trigonometriche degli archi; ma sarà sempre indispensabile aver sott'occhio l'istrumento per ben capire le cose, ed esercitarsi ad usarlo.

MANIERA DI SCRIVERE I NUMERI DEGLI ANTICHI ROMANI.

Le cifre adoperate per rappresentare i numeri diconsi cifre *arabe*, perchè gli arabi ne furono gl'inventori. Gli antichi romani per indicare i numeri facevano uso delle lettere dell'alfabeto che veggonsi scritte qui appresso sul numero da ciascuna rappresentato.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000.

Due I rappresentano il numero 2, tre I il numero 3. Un I posto a sinistra di V o di X faceva diminuire questi numeri di un'unità; ed uno, due, o tre I posti a dritta di V o di X aumentano questi numeri di uno, di due, o di tre unità. Perciò i seguenti numeri scritti in cifre romane equivalgono a quelli scritti al di sotto in cifre *arabe*.

II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13,

Lo stesso effetto faceva l'X messo a dritta o a sinistra di L o di C; perciò sono eguali i segnenti n.ri scritti in corrispondenza uno sotto l'altro

XL	L	LX	LXX	LXXX	XC	CX	CXX	CXXX
40	50	60	70	80	90	110	120	130

I n.ri contenenti decine ed unità si rappresentavano scrivendo quello dinotante le unità a dritta di quello dinotante le decine, come qui sotto

XI	XIV	XVII	XXXV	XLIX	LXIII	XCIV
11	14	17	35	49	63	94.

Ecco qui appresso altri numeri in corrispondenza:

CC	CCC	CCCC	MM	MMM	MMMM	IↃ	CIↃ	IↃↃ	CCIↃↃ	CCCIↃↃↃ
200	300	400	2000	3000	4000	500	1000	5000	10000	100000.

Quindi si rileva che lo stesso numero, p. e. 1848, può esser rappresentato da MDCCCXLVIII e da CIↃIↃCCCXLVIII. Ciò perchè le lettere M e D furono introdotte dopo per brevità.

FINE

INDICE

*Nozioni preliminari. — Definizioni. . . . . . *dalla pagina* 5 *a* 8
*Numerazione parlata e scritta . . . . » 9 » 12
*Maniera di scrivere e di leggere i numeri . . . . » 13 » 14
Sistema di numerazione. . . . . » 15 » 16
*Addizione dei numeri interi. . . . . » 17 » 19
Esercizii relativi all' addizione. . . . . » 19 » 20
*Sottrazione dei numeri interi . . . . » 20 » 22
Osservazioni sulla sottrazione — Complemento aritmetico » 22 » 24
Esercizii relativi alla sottrazione . . . . » 24 » 25
*Moltiplicazione dei numeri interi. . . . . » 25 » 33
*Teoremi relativi alla moltiplicazione. . . . . . . » 34 » 36
Esercizii relativi alla moltiplicazione. . . . . . . » 36 » 37
*Divisione dei numeri interi . . . . » 37 » 50
*Teoremi relativi alla divisione. . . . . » 51 » 54
Esercizii relativi alla divisione. . . . . » 54 » 55
Potenze e radici dei numeri . . . . » 55 » 57
*Resti della divisione e caratteri di divisibilità per i numeri 2 e 5, 4 e 25, 8, 3 e 9, 11 . . . . » 58 » 61
Prova del 9 per la moltiplicazione e per la divisione . » 62 » 63
Massimo comun divisore — Teoremi su cui poggia la sua ricerca . . . . » 64 » 65
*Ricerca del massimo comun divisore di due numeri . . » 65 » 67
*Proprietà del massimo comun divisore e dei numeri primi fra loro . . . . » 67 » 68
Ricerca del massimo comun divisore di più numeri . » 69
Minimo multiplo comune di più numeri — Sua ricerca. » 69 » 70
Numeri primi—Loro proprietà—Fattori primi di un numero » 70 » 74
Decomposizione di un numero in fattori primi . . . » 74 » 76
Modo di verificare se un numero è primo. . . . . » 77
Ricerca del massimo comun divisore e del minimo multiplo per mezzo dei fattori primi. . . . . » 77 » 78
Ricerca di tutti i divisori di un numero . . . . . » 78 » 80
*Definizioni e proprietà delle frazioni . . . . . . » 81 » 85
*Riduzioni delle frazioni . . . . » 85 » 93
*Addizione e sottrazione delle frazioni . . . . . . » 94 » 97
*Moltiplicazione delle frazioni . . . . » 98 » 100
Frazioni di frazioni . . . . » 101 » 102
*Divisione delle frazioni . . . . » 102 » 104
Generalizzazione di alcuni teoremi relativi alla divisione » 104 » 105
Generalizzazione delle regole del calcolo delle frazioni. » 105 » 106
Alcune relazioni fra i termini di più frazioni eguali . » 107
Massimo comun divisore delle frazioni. . . . . . . » 107 » 108
Esercizii relativi alle frazioni . . . . » 108 » 110
*Numeri decimali e loro proprietà. . . . . » 111 » 114
*Addizione e sottrazione de' numeri decimali . . . . » 115 » 116
*Moltiplicazione e divisione de' numeri decimali . . . » 116 » 120
*Calcolo delle frazioni ordinarie combinate con decimali » 121 » 122
*Riduzione di una frazione ordinaria in decimale. . . » 122
Condizioni perchè una frazione ordinaria sia convertibile esattamente in decimale . . . . » 123
Frazioni decimali periodiche . . . . » 124 » 126
Ricerca della generatrice di una frazione decimale periodica » 126 » 128
Casi in cui una frazione ordinaria si sviluppa in decimale periodica semplice o mista . . . . » 129
Riduzione di una frazione decimale in ordinaria . . » 129
Correzione della cifra a dritta di un numero approssimato » 130 » 131

*Sistema metrico — Distinzione delle diverse specie di unità negli usi sociali . . . . » 131 » 133
*Sistema metrico decimale . . . . » 134 » 137
Titolo delle monete . . . . » 137 » 139
Valore intrinseco e nominale delle monete. . . . . » 139 » 140
Cambio delle monete — Valore al pari delle medesime » 141 » 142
*Sistema metrico antico e nuovo napolitano . . . . » 142 » 143
*Riduzione dell' unità di un ordine del sistema metrico decimale in altre di ordine diverso . . . . » 146 » 147
*Preferenza del sistema metrico decimale sugli altri sistemi » 148
*Ragguaglio fra le misure del sistema metrico decimale e del napolitano, e riduzione delle une nelle altre misure » 149 » 150
Antico sistema metrico francese . . . . » 150
Sistema metrico inglese. . . . . » 151
*Numeri complessi o denominati . . . . » 152
*Riduzioni dei numeri complessi . . . . » 152 » 156
*Addizione e sottrazione dei numeri complessi . . . » 156 » 158
*Moltiplicazione e divisione dei numeri complessi. . . » 159 » 163
*Ragioni e proporzioni . . . . » 164 » 166
Proprietà della ragione e proporzione aritmetica. . . » 167 » 168
*Proprietà della ragione e proporzione geometrica . . » 169 » 171
Teoremi relativi alle proporzioni. . . . . » 172 » 174
*Regola del tre — Definizioni . . . . » 175
*Regola del tre semplice — Problemi relativi . . . . » 176 » 178
Metodo di riduzione all' unità . . . . » 178
*Regola del tre composta . . . . » 179 » 181
Metodo di riduzione all' unità. . . . . » 181
*Problemi relativi alla regola del tre composta . . . » 182 » 183
*Problemi d' interesse. . . . . » 183 » 188
*Questioni di sconto e di rendita consolidata . . . . » 188 » 191
*Regola di società e di partizione . . . . » 192 » 197
*Regola di alligazione o delle miscele . . . . . . » 198 » 201
*Medio aritmetico . . . . » 201 » 202
*Regola congiunta . . . . » 202
Regola di falsa posizione . . . . » 180 » 184
Composizione del quadrato di un numero. . . . . . » 185 » 186
Estrazione della radice quadrata dei numeri . . . . » 186 » 196
Numeri incommensurabili . . . . » 196 » 197
Composizione del cubo di un numero . . . . » 197 » 198
Estrazione della radice cubica dei numeri. . . . . » 199 » 203
Progressioni e logaritmi. . . . . » 204 » 232
Interessi composti — Annualità — Vitalizii, ec. . . . » 233 » 240
Approssimazioni numeriche — Errori relativi . . . . » 241 » 273
Diversi sistemi di numerazione . . . . » 274 » 278
Regolo calcolatore. . . . . » 279 » 284
*Maniera di scrivere i numeri degli antichi romani . . » 284

Errori	*Correzioni*	*pagina*	*riga*
parte del	parte della rata del	109	20
111, 65	1015, 651	150	30
denominatore di $^{21}/_{40}$	denominatore :	190	7
quadrato	quadrato di $^{21}/_{40}$	190	8